RICERCHE
SOPRA LE SERIE
E SOPRA
LA INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI
A DIFFERENZE PARZIALI

DI GIULIANO FRULLANI

P. P. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI

NELL' I. E R. UNIVERSITÀ DI PISA.

FIRENZE
Nella Stamperia Magheri da Badia
1816.

Al Chiarissimo Signore

PIETRO PAOLI

P. Emerito delle Matematiche Superiori
nell' I., e R. Università di Pisa
R. Consultore e Soprintendente degli Studj del Gran-Ducato,
Cav. dell' Insigne Ordine di S GIUSEPPE,
Uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze, Socio Corrispondente
dell' Istituto di Francia ec. ec.

Nell' offrirle, Sig. Soprintendente pregiatissimo, questo mio lavoro, più che ad ogni altro motivo, intendo di servire all' alta stima che Ella m' inspira. Il tessere l' Elogio degli Uomini sommi è tale impresa che solamente appartiene a chi gli eguaglia; lontano dal credermi in questa classe nè posso, nè debbo dunque annoverare le cagioni che per Lei mi animano a quel sentimento, di cui i coetanei troveranno la giustificazione nelle di Lei Opere, ed i Posteri in queste medesime, e nella Storia delle Scienze.

Ma forse, parlando di Posterità, mi lusingo di troppa vita per queste mie tenui fatiche; e se pure, perchè fregiate del di Lei Nome illustre, esse vi giungeranno, la mia gloria maggiore sarà l'avere ammirato un Uomo che tanto onora l'Italia, ed averne data pubblica la testimonianza.

Ho intanto l'onore di dichiararmi pieno di rispetto, e di venerazione

Di V.S. Illustriss.

Firenze 12 Novembre 1816.

Devotiss. Obbligatiss. Servitore
G. Frullani.

I.

La Teorìa delle Serie, considerata come un semplice mezzo di approssimazione si estende indefinitamente a tutte le parti dell'analisi allorchè vogliono applicarsi ai casi particolari le formule generali, e sotto questo punto di vista le Serie non debbono considerarsi che come trasformate di espressioni per verità più semplici, perchè composte di un limitato numero di termini, ma che non si prestano con facilità al Calcolo numerico. In questo caso la soluzione di qualsivoglia problema naturalmente si compone di due parti, avendo l'una per oggetto l'indagine del rapporto finito tra le variabili e le costanti, e l'altra il modo di esprimere una di queste quantità per le altre. Ma bene spesso succede che l'imperfezione dei metodi analitici non ci concede di giungere al primo scopo, ed in queste circostanze la Teorìa delle Serie è di un uso ancor più apprezzabile; E siccome questa Dottrina ha data l'origine al Calcolo differenziale, ed integrale, così ancora supplisce al loro difetto, ed offre il più semplice mezzo per la soluzione dei problemi che dipendono dalla Integrazione delle Equazioni differenziali, porgendo anche il modo di ottenere se non esatti resultati, almeno tali che possa l'errore ad arbitrio diminuirsi, e talvolta perfino ristringersi entro limiti determinati. Questi vantaggi tanto più sono valutabili, in quanto che, come abbiamo osservato, conviene quasi sempre adottar la forma delle Serie anche quando si giunge ad espressioni finite, la ricerca delle quali pertanto nella pratica soluzione di un problema può sovente considerarsi come superflua.

II.

Ma considerata la Dottrina delle Serie indipendentemente dal suo pratico uso nella soluzione dei problemi che dipendono dalla Integrazione delle Equazioni differenziali, allora essa non è di una utilità così manifesta. Ed infatti il primo, e più importante oggetto dell'analisi quello si è di mettere in evidenza i rapporti che distinguono le varie funzioni, e la loro classazione, in modo che apparisca come le une possono alle altre ridursi, e quali siano le essenzialmente irreducibili, in una parola, assegnandone la indole distintiva. Simile intento non potrebbe, almeno nell'attuale stato dell'analisi, ottenersi, allorchè queste funzioni siano espresse in serie infinite, nelle quali sovente una stessa forma generale può rappresentare funzioni di natura differentissima, e dove forme diverse spesso si riportano a funzioni congeneri.

III.

Quindi è senza dubbio che i primi Geometri dei nostri tempi tanto hanno consacrato del loro studio alla sommazione delle serie, alle quali, dopo averle fatte supplire alla insufficienza del Calcolo Integrale, hanno applicato questo Calcolo stesso per ridurle ad espressione finita. Nell'immenso numero delle ricerche che rendono il nome di Euler sacro ai Cultori dell'analisi, quelle sopra l'esposto oggetto sono le più moltiplici, e le più variate, e dove ha particolarmente sviluppate le prodigiose risorse del suo genio. Ora guidato dall'Induzione, ora afferrando un non osservato rapporto tra le varie trasformazioni che può subire una serie, spesso è pervenuto a singolarissimi resultati. Molte volte introducendo in una serie proposta una nuova variabile, sopra questa operando o per mezzo delle differenziazioni, o delle Integrazioni, ed ottenuta la somma della nuova serie, si riportava alla proposta determinando convenientemente la variabile ausiliaria nella formula ottenuta; Quindi sovente un Integrale definito gli offrì la somma di complicatissime serie.

IV.

La introduzione di questa nuova variabile per assegnare l'espressione finita di cui una serie proposta è suscettibile può riguardarsi come un mezzo sommamente fecondo, e luminoso quando da una Equazione differenziale si tratta di esprimere in modo finito una variabile per l'altra. Sono infatti nelle Equazioni differenziali talvolta le variabili in modo tra di loro connesse, che il ridurle alla separazione trascende le forze dell'analisi, e ciò molte volte dipenderà dall'essere anche nella Equazione finita in modo le variabili tra di loro avviluppate che l'una non possa in modo finito esprimersi per l'altra. Quindi sovente le differenziazioni complicando i mutui rapporti delle variabili, rendendoli più generali, maggiori saranno le difficoltà della separazione nella Equazione differenziale. Spesso avviene per altro che l'introduzione di una nuova variabile, la quale debba sparire dal resultato al fine del Calcolo, in sè comprendendo la relazione trascendente delle variabili primitive, presenti tra queste un rapporto finito. Pertanto tutte le volte che la nuova variabile dovrà subire delle integrazioni nella formula ove è implicata, per toglierla dal resultato finale converrà determinarla dietro stabilite condizioni; il che ricondurrà il Problema alla ricerca di un'Integrale definito.

V.

Dietro simili vedute, la ricerca dell'Integrale delle formule differenziali tra limiti determinati, è divenuta un oggetto di specialissima applicazione per i Geometri dei nostri giorni. Ai numerosi resultati che sopra tale oggetto l'illustre Euler ottenne, debbono aggiungersene una infinità di altri, che i sommi Geometri Laplace, Lagrange, Legendre ec. hanno per differenti strade ottenuti; ed al primo di questi in particolar maniera deve questo ramo di analisi, in quanto chè, conformatosi alle vedute di Euler, ne ha esteso l'uso alla Integrazione delle Equazioni differenziali ordinarie, ed

ha ridotto a dipendere dai principj stessi delle classi estesissime di Equazioni a differenze parziali. Possono vedersi le ricerche di questi Illustri promotori dell' analisi nelle Collezioni Accademiche, e nella grand'opera del Celebre Sig. Lacroix sul Calcolo Integrale, ove si trovano con bell' ordine disposte.

VI.

Questo immenso corpo di resultati, ai quali sono stati i Geometri condotti da metodi differentissimi, e particolari, sembra precorrere nell'analisi dei nuovi, e generali metodi, mediante i quali, classate, e riconosciute le vere trascendenti irreducibili, e per conseguenza introdotti dei nuovi segni, tutto quello che su tale oggetto si è presentato ai primi Geometri dei nostri tempi, discenda come caso speciale da una universal Teorìa. Percorrendo la Storia dell'analisi, tutte le volte che le forze riunite dei Geometri hanno preparata qualche rivoluzione nella Scienza, s'incontra un fenomeno simile a quello che attualmente si osserva. Prima della invenzione dei nuovi calcoli, Wallis, Barrow, Huyghens, e molti altri, traendo particolare soccorso o dalla imperfetta Dottrina delle Serie, o dalle Geometriche considerazioni, furono condotti a molti analitici resultati, dei quali per altro non seppero riconoscere nè la filiazione, nè la comune sorgente, che la scoperta dell'analisi infinitesimale pose in evidenza. La dotta guerra che tra i Geometri si accese in occasione del celebre problema degli Isoperimetri, fù origine di una moltitudine di scoperte, e di singolari metodi, che primieramente da Euler ridotti ad una stessa, ed uniforme analisi, furono in progresso richiamati dal sommo Lagrange a dipendere dal solo calcolo differenziale. La stessa Teorìa delle Equazioni Algebriche prima di Lagrange, e Ruffini composta di diversi, ed in apparenza non dipendenti metodi, offre ai nostri giorni delle simili considerazioni; siccome anche lo sviluppo delle così dette funzioni Polinomiali che il Sig Paoli ha mostrato dipendere dal solo Calcolo differenziale, e la Teorìa delle funzioni generatrici del Sig. Laplace,

che tanto felicemente ha dimostrata l'origine delle Celebri relazioni dei differenziali con le potenze positive, e degli integrali con le potenze negative, relazioni delle quali alcune fino da Leibnitz erano state osservate, e che da Condorcet, e Lagrange in maggior numero scoperte, pure non erano da verun principio generale dedotte. Questi fatti, ed altri molti che la Storia delle Scienze ci presenta dimostrano che lo spirito umano lentamente avanzandosi alla formazione dei metodi generali, solamente vi giunge allorchè essendo al possesso della soluzione di molti casi particolari, ravvisa in questi tutti quel punto di contatto che gli unisce, seguendo le tracce di quella occulta Catena di cui non sono essi che altrettanti anelli; ed a misura che più casi saranno insieme congiunti, e ridotti a dipendere da un minor numero di principj, più facilmente si presterà all'evidenza quella sconosciuta Legge dalla quale tutti dipendono.

VII.

Abbiamo superiormente indicato il felice uso che Euler, ed altri Illustri Geometri han fatto degli Integrali definiti per la Integrazione delle Equazioni differenziali. Un Integrale definito rappresenta sempre la somma di una serie, poichè è noto che sempre può integrarsi per serie una formula differenziale anche indefinitamente. In questo caso la Teorìa delle serie molte volte adempirà al duplice oggetto di determinar l'Integrale di cui la proposta Equazione è suscettibile, e quindi con le approssimazioni valutarlo. Allorchè la ricerca di questo Integrale definito dipenderà dalle funzioni circolari, il Problema sarà meno complicato. La proprietà dei seni, e dei coseni di riprodursi con le differenziazioni, e le Integrazioni successive offre spesso il modo di determinare la natura delle Serie, e quella dell'Integrale definito. Così se una data Equazione differenziale avesse per Integrale $y = \int F\ (x, \varphi)\ d\,\varphi$, ove la integrazione dovesse farsi tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$, ove π denota la mezza

periferia, è chiaro che se potremo sviluppare la funzione $F(x, \varphi)$ in modo che sia

$$F(x, \varphi) = A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots$$

ove A, A_1, A_2, ec. sono altrettante funzioni di x, noi avremo

$$y = \int F(x, \varphi)\, d\varphi = A\pi.$$

VIII.

Noi ci proponghiamo in queste ricerche di sviluppare le proprietà di questo genere di funzioni con maggiore estensione di quello che non è stato fatto fin'ora. Una rigorosa dimostrazione ci condurrà a molti dei singolari resultati che per induzione hanno i Geometri riconosciuti sopra le serie che dipendono dalle trascendenti circolari; ed assoggettando queste ricerche ad un metodo uniforme, ne vedremo discendere dei corollarj assai interessanti sopra gli Integrali definiti, e sopra la Teorìa generale delle serie. Vedremo dipenderne l'Integrazione di alcune Equazioni differenziali la cui evoluzione sembra oltremodo difficile ad ottenersi per altra via, e le Equazioni a differenze parziali ci offriranno dei casi molto generali che coi metodi stessi potranno completamente risolversi.

IX.

Tutte le trasformazioni che possono subire le funzioni Circolari si appoggiano sopra a quel Teorema mediante il quale dati i seni, ed i coseni di due archi s'insegna a trovare i seni, ed i coseni della loro somma. La soluzione che di questo Problema si dà negli Elementi di Trigonometrìa oltre ad esser complicata, presenta molte difficoltà ove vogliasi applicar la costruzione che esige a degli archi, la cui somma oltrepassi il Quadrante. Per supplire al difetto di questa Dimostrazione il cel. Sig. Legendre si è prevalso di un ingegnoso metodo, mediante il quale, provata la legittimità delle formule nel

primo Quadrante, le ha estese al successivo, e così di mano in mano a tutta la periferia circolare. Ma così componendo la completa Dimostrazione di questo utilissimo Teorema Trigonometrico di due parti egualmente complicate molto si perde dal lato della semplicità, ed eleganza; Onde prima d' inoltrarci nelle Ricerche che formano il nostro oggetto, non sarà inutile quì l' indicarne una nuova, che non presenta alcuna delle difficoltà che nella conosciuta s' incontrano.

Sia l' Arco HB $= x$; l' Arco BC $= y$; unendo il punto B col centro A del Circolo per mezzo del Raggio BA, ed abbassando la Perpendicolare BG sul Raggio HA, e le perpendicolari CE, CF sui raggi AB, AH, noi avremo

BG $=$ *sen.* x, GA $=$ *cos.* x; CE $=$ *sen.* y, AE $=$ *cos.* y; CF $=$ *sen.* $(x+y)$; FA $=$ *cos.* $(x+y)$.

Ciò posto condotta la perpendicolare BD sopra la retta CF, facendo BD $= u$, CD $= z$, sarà

$$\text{sen.}\ (x+y) = \text{sen.}\ x + z$$
$$\text{cos.}\ (x+y) = \text{cos.}\ x - u.$$

Quadrando ambedue queste Equazioni, ed aggiungendole si avrà

$$(1)\ldots\ldots 2\,(z\ \text{sen.}\ x - u\ \text{cos.}\ x) + n^2 + z^2 = 0$$

Ma conducendo la corda BC, abbiamo $(BC)^2 = (\text{sen.}\ y)^2 + (1 - \text{cos.}\ y)^2 = 2(1 - \text{cos.}\ y)$; ed anche $(BC)^2 = z^2 + u^2$; Quindi avremo ancora

$$(2)\ldots\ldots 2\,(1 - \text{cos.}\ y) = z^2 + u^2$$

Le Equazioni (1), (2) ci daranno eliminando i Valori di z, e di u. Ma per evitare di risolvere una complicata Equazione di secondo grado, vediamo di semplicizzare le due Equazioni otteuute affinchè la di loro soluzione più comodamente riesca. Nella Equazione (1) si sostituisca in luogo di $z^2 + u^2$ il suo valore preso dalla (2), ed otterremo

$$z\ \text{sen.}\ x - u\ \text{cos.}\ x + 1 = \text{cos.}\ y$$

Elevando al quadrato, si otterrà

$$z^2\,(\text{sen.}\ x)^2 + u^2\,(\text{cos.}\ x)^2 + 2\,(z\ \text{sen.}\ x - u\ \text{cos.}\ x) - 2\,u\,z.\ \text{sen.}\ x.\ \text{cos.}\ x = -\,(\text{sen.}\ y)^2$$

e ponendo per $z\ sen.\ x - u\ cos.\ x$ il suo valore $-(z^2+u^2)$, sarà
$z^2(1-(sen.\ x)^2) + u^2(1-(cos.\ x)^2) + 2uz.\ sen.\ x.\ cos.\ x = (sen.\ y)^2$.
cioè estraendo la radice quadrata

$$z\ cos.\ x + u\ sen.\ x = \pm\ sen.\ y$$

Questa Equazione, combinata con l'altra

$$z\ sen.\ x - u\ cos.\ x + 1 = cos.\ y$$

ci condurrà speditamente al resultato. Moltiplicando la prima per $sen.\ x$, e la seconda per $cos.\ x$, e sottraendo, avremo

$$u = \pm\ sen.\ x.\ sen.\ y - cos.\ y\ cos.\ x + cos.\ x$$

ed alternando i moltiplicatori ed aggiungendo, sarà anche

$$z = sen.\ x.\ cos.\ y \pm sen.\ y.\ cos.\ x - sen.\ x$$

onde sostituendo nelle Equazioni

$$sen.(x+y) = sen.\ x + z$$
$$cos.(x+y) = cos.\ x - u$$

avremo immediatamente

$$cos.(x+y) = cos.\ x.\ cos.\ y \mp sen.\ x.\ sen.\ y$$
$$sen.(x+y) = sen.\ x.\ cos.\ y \pm sen.\ y.\ cos.\ x:$$

E per determinare quale dei due segni convenga preferire, basta che in questa seconda formula suppongasi $x=0$; il che ci darà

$$sen.\ y = \pm\ sen.\ y$$

onde il segno superiore dovrà preferirsi.

Questa Eliminazione potrebbe effettuarsi anche in altre maniere. Nella Equazione

$$z\ sen.\ x - u\ cos.\ x + 1 = cos.\ y$$

si pongano in luogo di u, e di z i loro valori presi dalle Equazioni

$$cos.(x+y) = cos.\ x - u$$
$$sen.(x+y) = sen.\ x + z$$

ed otterremo

$$sen.\,x\ sen\,(x+y) + cos.\,x\,.\,cos.\,(x+y) = cos.\,y$$

Senza punto alterare i rapporti possiamo in questa formula variare x in y, e vice-versa, il che darà

$$sen.\,y\ sen.\,(x+y) + cos.\,y\,.\,cos.(x+y) = cos.\,x$$

Eliminando il $sen.\,(x+y)$ tra queste due Equazioni, avremo

$$cos.(x+y) = \frac{sen.\,x\,.\,cos.\,x - sen.\,y\,.\,cos.\,x}{sen.\,x\,.\,cos.\,y - cos.\,x\,.\,sen.\,y}$$

Il Numeratore di questa frazione si moltiplichi nel primo termine per $(cos.\,y)^2 + (sen.\,y)^2$; e nel secondo per $(cos.\,x)^2 + (sen.\,x)^2$, il che non altererà la Equazione, ed avremo

$$cos.\,(x+y) = \frac{sen.\,x\,.\,cos.\,x\,.\,(cos.\,y)^2 + sen.\,x\,.\,cos.\,x\,.\,(cos.\,y)^2 - sen.\,y\,.\,cos.\,y\,.\,(cos.\,x)^2 - sen.\,y\,.\,cos.\,y\,.\,(sen.\,x)^2}{sen.\,x\,.\,cos.\,y. - cos.\,x\,.\,sen.\,y}$$

$$= \frac{(sen.\,x\,.\,cos.\,y. - cos.\,x\,.\,sen.\,y)\,(cos.\,x\,.\,cos.\,y - sen.\,x\,.\,sen.\,y)}{sen.\,x\,.\,cos.\,y - cos.\,x\,.\,sen.\,y.}$$

ciò è

$$cos.\,(x+y) = cos.\,x\,.\,cos.\,y - sen.\,x\,.\,sen.\,y$$

Se poi si eliminerà il $cos.\,(x+y)$, avremo nello stesso modo la espressione del seno.

La costruzione Geometrica che esige questa Dimostrazione si applica indistintamente a tutti i punti della Periferia, come è facile verificare.

X.

Le formule ottenute, combinate con la generale Equazione del circolo basteranno per sviluppare tutte le proprietà delle funzioni di questa curva, e la ricerca dei differenziali dei seni, e coseni, non esigerà nessun nuovo principio, quando siano esposte le proprietà generali delle serie che procedono per le potenze intere, e positive di una variabile, proprietà che bisogna sempre conoscere,

quando si tratta di applicare il calcolo differenziale a qualsivoglia quantità dipendente dalle curve. Chiamato φ un arco circolare qualunque, facilmente trovasi $\frac{d.sen.\varphi}{d\varphi}=a\cdot cos.\varphi$; $\frac{d.cos.\varphi}{d\varphi}=-a.sen.\varphi$, ove a è una costante di sconosciuto valore, per determinare il quale conviene ricorrere a quelle generali proprietà. Egli è facile infatti il convincersi che il ragionamento impiegato per la prima volta dall' Illustre Lagrange per determinar questa costante, non solo è indipendente da qualsivoglia particolar proprietà del circolo, ma si applica ad ogni curva, ed è indispensabile per la ricerca delle formule della rettificazione, quadratura ec. Pertanto queste formule generali, che implicano quei principj, dovranno condurci alle stesse determinazioni, come facilmente possiamo dimostrare. Sia s l'arco di una curva qualunque riferita alle coordinate ortogonali x, y; abbiamo come è noto

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

ossia

$$1=\sqrt{\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}}$$

nel caso del circolo, si ha $y=sen.s$, $x=cos.s$; ed abbiamo anche

$$\frac{d.sen.s}{ds}=a\,cos.s$$

$$\frac{d.cos.s}{ds}=-a\,sen.s$$

ove a è indeterminata. Sostituendo questi valori nella formula

$$1=\sqrt{\left(\frac{d.sen.s}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\,cos.s}{ds}\right)^2}$$

avremo

$$1=\sqrt{a^2(sen.s^2+cos.s^2)}=\pm a$$

Quindi $a = \pm 1$. Sarà pertanto

$$\frac{d.\ sen.\ s}{d\ s} = \pm\ cos.\ s$$

$$\frac{d.\ cos.\ s}{d\ s} = \mp\ sen.\ s$$

ove nella prima Equazione converrà nel doppio segno preferire il superiore, poichè il seno aumenta al crescere dell'arco: e nella seconda l'inferiore, diminuendo il coseno all'aumentarsi dell'arco.

Ma se per la ricerca dei differenziali delle funzioni circolari supporremo conosciute le generali formule della rettificazione delle curve, potremo ancora risparmiarci la determinazione della costante a, ed ottenere per mezzo della sola equazione del circolo il valore di quei differenziali stessi. Riprendiamo infatti la formula (A)

$$(A) \ldots\ldots \frac{d\,s}{d\,y} = \sqrt{1 + \frac{d\,x^2}{d\,y^2}}$$

se sarà $y = sen.\ s$, $x = cos.\ s$, avremo la Equazione

$$(sen.\ s)^2 + (cos.\ s)^2 = 1$$

e quindi differenziando

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \frac{d.\ cos.\ s}{d.\ sen.\ s} = -\frac{sen.\ s}{cos.\ s}$$

sostituendo ora nella formula (A) troveremo

$$\frac{d\ \ s}{d.\ sen.\ s} = \pm \frac{1}{cos.\ s}$$

Ed i principj del calcolo delle funzioni ci daranno subito

$$\frac{d.\ sen.\ s}{d\ s} = \pm\ cos.\ s$$

e similmente operando

$$\frac{d. \cos. s}{d s} = \pm \operatorname{sen}. s$$

ove determineremo come sopra quali segni debbano adottarsi.

Vedesi dunque che la determinazione di questi differenziali manifestamente dipende dalla general Teorìa delle curve, alla quale, per non anticipar nulla, dovrebbe negli Elementi rimettersene la ricerca.

XI.

Premesse queste considerazioni, prenderemo ad esaminare alcune delle meno complicate formule dipendenti dalle funzioni circolari, onde ridurle in serie della forma

$$A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots\ldots$$

forma di cui abbiamo dimostrata (VII) l'utilità per il semplicissimo mezzo che offre per la ricerca degli integrali definiti delle formule differenziali tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$. E per incominciare dalle cose più semplici, sia proposto di svolgere $\log.(1 + \cos. \varphi)$ in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici di φ. Noi avremo

$$\log. (1 + \cos. \varphi) = \cos. \varphi - \frac{(\cos. \varphi)^2}{2} + \frac{(\cos. \varphi)^3}{3} - \&c.$$

E ponendo in luogo di $(\cos. \varphi)^2$, $(\cos. \varphi)^3$ &c. i loro valori espressi per $\cos. \varphi$, $\cos. 2\varphi$ &c. otterremo una serie di questa forma

$$\log. (1 + \cos. \varphi) = -A + A_1 \cos. \varphi - A_2 \cos. 2\varphi + A_3 \cos. 3\varphi - \&c.$$

Per trovare i coefficienti A, A_1, A_2 differenziamo rapporto a φ, ed avremo

$$\frac{-\operatorname{sen}. \varphi}{1 + \cos. \varphi} = -A_1 \operatorname{sen}. \varphi + 2A_2 \operatorname{sen}. 2\varphi - 3A_3 \operatorname{sen}. 3\varphi + \&c.$$

Moltiplicando per $1 + \cos. \varphi$, e riducendo i prodotti dei seni, e coseni in seni di archi multipli, avremo per determinare i coefficienti A, A_1, A_2 &c. la serie seguente di Equazioni

$$(a)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} 2A_2 - 2A_1 + 2 = 0 \\ 3A_3 - 4A_2 + A_1 = 0 \\ 4A_4 - 6A_3 + 2A_2 = 0 \\ 5A_5 - 8A_4 + 3A_3 = 0 \\ \&c. \end{cases}$$

Tutte queste sono rappresentate ad eccezione della prima dalla Equazione

$$x A_x - 2(x-1) A_{x-1} + (x-2) A_{x-2} = 0$$

La quale non incomincia per conseguenza ad aver luogo che per i valori di $x=3$. L' Integrale della precedente Equazione a differenze finite si trova essere

$$A_x = \frac{c + c' x}{x}$$

essendo c, c' due costanti arbitrarie. Per determinarle, bisogna conoscere il valore di A_1, e di A_2, e basta di avere quello di A_1, poichè la prima Equazione ci darà allora quello di A_2. Se si prende la somma di tutte le Equazioni (a), è facile il vedere che svaniranno tutti i termini ad eccezione dei seguenti

$$2 - 2A_1 + A_1 = 0$$

onde $A_1 = 2$, $A_2 = 1$. Sarà dunque $A_1 = 2 = c + c'$;........

$$A_2 = \frac{c + 2c'}{2} = 1; \text{ e quindi } c' = 0, c = 2; \text{ e perciò } A_x = \frac{2}{x}.$$

Rimane adesso a trovarsi il valore di A; a quest'oggetto si ponga $\varphi = 0$, ed avremo

$$\log. 2 = -A + 2\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \&c.\right) = -A + 2 \log. 2.$$

E quindi $A = -\log. 2$; sarà pertanto

$$\log.(1 + \cos.\varphi) = -\log. 2 + \tfrac{2}{1}.\cos.\varphi - \tfrac{2}{2}.\cos. 2\varphi + \tfrac{2}{3}.\cos. 3\varphi - \&c.$$

Se moltiplicheremo questa Equazione per $d\varphi$, avremo integrando

$$\int d\varphi.\log.(m + \cos.\varphi) = cost. - \varphi.\log. 2 + \tfrac{2}{1}.\,sen.\varphi - \tfrac{2}{4}\,sen. 2\varphi\ \&c.$$

E quindi l'Integrale $\int d\varphi . log.(1+cos.\varphi)$ tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$ sarà $-\pi \, log. \, 2$.

XII.

La determinazione delle costanti A_1, A_2, A_3, &c. potrebbe anche più semplicemente effettuarsi mediante una ulterior Differenziazione. Riprendiamo la serie

$$log.(1+cos\,\varphi) = -A + A_1 cos.\varphi - A_2 cos.2\varphi + A_3 cos.3\varphi - \&c.$$

Differenziando replicatamente rapporto a φ, si avrà

$$\frac{-1}{1+cos.\varphi} = -A_1 cos.\varphi + 2^2 A_2 cos.2\varphi - 3^2 A_3 cos.3\varphi + \ldots$$

Moltiplicando per $1+cos.\varphi$, e riducendo i prodotti dei coseni in coseni di archi moltiplici, avremo per determinare le quantità A_1, A_2, &c. le Equazioni

$$(b)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{array}{l} A_1 = 2 \\ 2^2 A_2 - 2A_1 = o \\ 3^2 A_3 - 2.2^2 A_2 + A_1 = o \\ 4^2 A_4 - 2.3^2 A_3 + 2^2 A_2 = o \\ \&c. \end{array}$$

Le quali tutte, ad eccezione della prima sono rappresentate dalla Equazione

$$x^2 A_x - 2(x-1)^2 A_{x-1} + (x-2)^2 A_{x-2} = o$$

che incomincia ad aver luogo per $x = 2$. Integrandola si troverà

$$A_x = \frac{cx + c'}{x^2}$$

Le prime due Equazioni (b) ci danno $A_1 = 2$, $A_2 = 1$; sarà dunque ancora

$$A_1 = c + c' = 2$$

$$A_2 = \frac{2c + c' = 1}{4}$$

onde $c = 2$, $c' = o$, ed in conseguenza $A_x = \frac{2}{x}$. Ed il primo termine A lo determineremo come precedentemente.

XIII.

Prendiamo a considerare adesso la formula più generale $\log.(1 + n \cos.\varphi)$. Ponghiamo
$\log.(1 + \cos.\varphi) = - A + A_1 \cos.\varphi - A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi - \&c.$
Avremo differenziando rapporto a φ

$$\frac{n \operatorname{sen}.\varphi}{1 + n \cos.\varphi} = A_1 - 2 A_2 \operatorname{sen}.2\varphi + 3 A_3 \operatorname{sen}.3\varphi - \&c.$$

e riducendo i prodotti dei seni e coseni in seni di archi moltiplici, facilmente troveremo dopo aver moltiplicato per $1 + n.\cos.\varphi$ la serie di Equazioni

$$(C)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{array}{l} 2 n A_2 - 2 A_1 + 2 n = o \\ 3 n A_3 - 4 A_2 + n A_1 = o \\ 4 n A_4 - 6 A_3 + 2 n A_2 = o \\ 5 n A_5 - 8 A_4 + 3 n A_3 = o \\ \&c. \end{array}$$

Le quali, ad eccezione della prima, sono generalmente espresse dall' Equazione

$$n x A_x - 2(x-1) A_{x-1} + n(x-2) A_{x-2} = o$$

Si troverà per l'Integrale di questa Equazione a differenze finite

$$A_x = \frac{c}{x}\left(\frac{(1 + \sqrt{(1-n^2)})}{n}\right)^x + \frac{c'}{x}\left(\frac{(1 - \sqrt{(1-n^2)})}{n}\right)^x$$

ove c, c' sono arbitrarie, per conoscer le quali, convien determinare i valori di A_1, e di A_2. Aggiungendo alla prima delle Equazioni (C) la seconda moltiplicata per la indeterminata h, la terza moltiplicata per h^2, e così in seguito, avremo

$$o = 2n - 2A_1 + nhA_1 + 2A_2(n - 2h + nh^2) + 3A_3 h(n - 2h + nh^2)$$
$$+ 4A_4 h^2 (n - 2h + nh^2) + \ldots$$

A questa Equazione potremo sodisfare, se faremo

$$2n - 2A_1 + nhA_1 = o$$

$$n - 2h + nh^2 = o$$

onde si trarrà

$$h = \frac{1 \pm \sqrt{(1-n^2)}}{n}$$

$$A_1 = \frac{2n}{1 \mp \sqrt{(1-n^2)}} = 2\,\frac{(1 \pm \sqrt{(1-n^2)})}{n}$$

Quindi resulta che non può essere $n > 1$, poichè diversamente si avrebbe A_1, ed ogni coefficiente imaginario; ed ivi inoltre dovrà prendersi il segno inferiore, acciò, come deve essere, resulti $A_1 = o$, se $n = o$. Essendo noto A_1, la prima delle Equazioni (c) ci darà

$$A_2 = \frac{A_1 - n}{n} = \frac{2 - 2\sqrt{(1-n^2)} - n^2}{n^2} = \left(\frac{1 - \sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^2$$

E sostituendo i valori di A_1, e A_2 nel valore generale di A_x, si troverà $c = o$, $c' = 2$. Quindi finalmente

$$A_x = \frac{2}{x}\left(\frac{1 - \sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^x$$

Conviene adesso determinare il valore di A. Facendo $\frac{1 - \sqrt{(1-n^2)}}{n}$ $= k$, avremo, posto $\phi = o$

$$log.(1+n) = -A + 2k - \frac{2k^2}{2} + \frac{2k^3}{3} - \frac{2k^4}{4} + \ldots = -A + 2\,log.(1+k)$$

Sarà dunque $A = log.\left\{\frac{(1+k)^2}{1+n}\right\} = log.\left\{\frac{2(1+n) - 2(1+n)\sqrt{(1-n^2)}}{n^2(1+n)}\right\}$ $= log.\frac{2k}{n}$. E quindi

$$log.(1 + n\cos.\phi) = -\,log.\frac{2k}{n} + \frac{2}{1}k.\cos.\phi - \frac{2}{2}k^2\cos.2\phi + \&c.$$

Moltiplicando per $d\varphi$, ed integrando, sarà anche

$$\int d\varphi . log . (1+n\cos.\varphi) = cost. - \varphi log. \frac{2k}{n} + \frac{2}{1} k . sen. \varphi - \frac{2}{4} k^2 sen. 2\varphi + ...$$

onde il valore di questo Integrale da $\varphi = o$ sino a $\varphi = \pi$ sarà $- \pi \; log. \frac{2k}{n}$.

XIV.

Il solo Calcolo Differenziale offre anch'esso il mezzo di ottenere la evoluzione di questa formula in un modo assai semplice, ed osservabile. Consideriamo infatti la formula $log.(m+\cos.\varphi)$ alla quale si riduce la precedente facendovi $m = \frac{1}{n}$, ed aggiungendovi $log. n$. Ponghiamo $log.(m+\cos.\varphi) = z$, ed otterremo differenziando replicatamente rapporto a φ

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) = - \frac{1 + m\cos.\varphi}{(m+\cos.\varphi)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Differenziando rapporto ad m, avremo anche

$$\left(\frac{dz}{dm}\right) = \frac{1}{m+\cos.\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) = - \frac{1}{(m+\cos.\varphi)^2} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Ed aggiungendo alla Equazione (1) la (2) moltiplicata per m, e la (3) moltiplicata per $m^2 - 1$, si troverà la Equazione

$$(D) \ldots\ldots \left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + m\left(\frac{dz}{dm}\right) + (m^2 - 1)\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) = o.$$

Supponghiamo adesso

$$z = log.(m+\cos.\varphi) = -A + A_1 \cos.\varphi - A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi - \&c. \ldots\ldots \pm A_x \cos.x\varphi.$$

E per determinare i Coefficienti A, A_1, A_2 &c. si sostituisca in luogo di z questa serie nella Equazione (D); supponendola soddi-

sfatta indipendentemente da tutti i diversi coseni degli archi multipli di φ otterremo immediatamente per determinare A_x la Equazione

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2} + \frac{m}{m^2 - 1} \frac{d A_x}{dm} - \frac{x^2}{m^2 - 1} . A_x = 0.$$

Per aver con facilità l'Integrale di questa Equazione Differenziale, introduciamovi in luogo di m un'altra variabile q. Abbiamo, q essendo funzione di m

$$\frac{d A_x}{d m} = \frac{d A_x}{d q} . \frac{d q}{d m}$$

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2} = \frac{d^2 A_x}{d q^2} . \frac{d q^2}{d m^2} + \frac{d A_x}{d q} . \frac{d^2 q}{d m^2}$$

onde sostituendo

$$\frac{d^2 A_x}{d q^2} . \frac{d q^2}{d m^2} + \frac{d A_x}{d q} . \left\{ \frac{d^2 q}{d m^2} + \frac{m}{m^2 - 1} \frac{d q}{d m} \right\} - \frac{x^2}{m^2 - 1} A_x = 0$$

Facciamo per determinar q

$$\frac{d^2 q}{d m^2} + \frac{m}{m^2 - 1} \frac{d q}{d m} = 0$$

e di questa bastandoci un integrale particolare, prenderemo $q =$ *arc. cos.* m; ossia $m =$ *cos.* q. La nostra trasformata diverrà allora

$$\frac{d^2 A_x}{d y^2} = - x^2 A_x$$

Onde si otterrà

$$A_x = c_x e^{q x \sqrt{-1}} + c'_x e^{-q x \sqrt{-1}}$$

Cioè, essendo $q =$ *Arc. cos.* m

$$A_x = c_x (m + \sqrt{(m^2 - 1)})^x + c'_x (m - \sqrt{(m^2 - 1)})^x$$

ove c_x, c'_x sono arbitrarie dependenti da x. Il primo termine A sarà dato dalla Equazione

$$\frac{d^2 A}{dm^2} + \frac{m}{m^2-1} \frac{dA}{dm} = 0$$

e troverassi

$$A = log. (m \mp \sqrt{(m^2-1)})\, e' + e$$

ove e', e sono arbitrarie.

Sostituendo questi valori, avremo

$$log. (m + cos. \phi) = - log. (m \pm \sqrt{m^2-1}).\, e' + e + [c_1 (m + \sqrt{m^2-1}) + c'_1 (m - \sqrt{m^2-1})] cos \phi$$
$$+ [c_2 (m + \sqrt{m^2-1})^2 + c'_2 (m - \sqrt{m^2-1})^2] cos. 2\phi + \ldots \pm [c_x (m + \sqrt{m^2-1})^x + c'_x (m - \sqrt{m^2-1})^x] cos. x\phi$$
$$\mp \&c.$$

Ove il segno superiore conviene ad x pari, e l' inferiore ad x dispari. Per determinare tutte le arbitrarie, ponghiamo $m = \frac{1}{n}$, ed avremo riducendo

$$log. (1 + n\, cos. \phi) = - log. \left(\frac{1 \pm \sqrt{1-n^2}}{n^2}\right) e' + \frac{e}{n} + \left[c_1 \left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right) + c'_1 \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)\right] cos. \phi$$
$$+ \left[c_2 \left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n^2}\right)^2 + c'_2 \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2\right] cos. 2\phi + \ldots \pm \left[c_x \left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x + c'_x \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x\right] cos. x\phi$$
$$\mp \&c.$$

Il secondo membro di questa Equazione dovrà ridursi $= 0$ se $n = 0$; Ed è chiaro in primo luogo che ciò succederà per i Coefficienti di $cos. \phi$, $cos. 2\phi \ldots cos. x\phi$. &c. se tutte le quantità $c_1, c_2, c_3, \ldots c_x$ &c. saranno $= 0$. Parimente dovrà essere $e = 0$ per motivo della n nel denominatore. Resta la quantità $log. \left(\frac{1 \pm \sqrt{(1-n^2)}}{n^2}\right). e'$ che nel caso di $n = 0$ dovrà essere $= 0$, ossia deve sciegliersi il doppio segno, e determinarsi la costante e' in modo che sia, quando $n = 0$

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{(1-n^2)}}{n^2}\right) e' = 1$$

Ciò è svolgendo

$$1 = \frac{e'}{n^2} \mp \frac{e'}{n^2} \mp \frac{e'}{2} \mp \frac{e' n^2}{8} \mp \&c.$$

Sarà dunque necessario proferire il segno inferiore, e prendere $e' = 2$.

In conseguenza sarà

$$A = log.\, 2\, (m - \sqrt{m^2 - 1})$$
$$A_x = c_x (m - \sqrt{m^2 - 1})^x$$

Queste riduzioni ci daranno

$$log.(m + cos.\,\varphi) = -log.\,2\,(m - \sqrt{(m^2-1)}) + c'_1 (m - \sqrt{(m^2-1)}).\, cos.\,\varphi - c'_2 (m - \sqrt{(m^2-1)})^2\, cos.\, 2\varphi\ \&c. \dots + \&c$$
$$\pm c_x (m - \sqrt{(m^2 - 1)})^x.\ cos.\, x\varphi \mp \&c.$$

Per determinare le costanti che restano, facciamo $m - \sqrt{(m^2 - 1)} = y$, ed avremo $m = \frac{1 + y^2}{2y}$; Quindi sostituendo otterremo

$$log.(y^2 + 2y\, cos.\,\varphi + 1) = c'_1 y\, cos.\,\varphi - c'_2 y^2\, cos.\, 2y + c'_3 y^3\, cos.\, 3\varphi - \&c. \dots \pm c'_x y^x\, cos.\, x\varphi \mp \&c.$$

Ed è chiaro che avremo il valore di c'_x se differenzieremo questa Equazione x volte rapporto ad y, e faremo quindi $y = o$ Per eseguire questa Operazione, si osservi che abbiamo

$$y^2 + 2y\, cos.\,\varphi + 1 = \left(y + e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\left(y + e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)$$

e quindi ancora

$$log.(y^2 + 2y\, cos.\,\varphi + 1) = log\left(y + e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) + log.\left(\varphi + e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)$$

Differenziando questa quantità x volte, ed eguagliandola al differenziale x^{esimo} della serie $c_1 y\, cos.\,\varphi - c_2 y^2\, cos.\, 2\varphi + \&c.$ preso nella supposizione stessa, otterremo

$$\pm 2.3.4 \dots (x-1) \left\{ \frac{1}{(y + e^{\varphi\sqrt{-1}})} + \frac{1}{(y + e^{-\varphi\sqrt{-1}})^x} \right\}$$
$$= \pm 2.3.4 \dots (x-1)\, x.\, c_x.\ cos.\, x\varphi \mp 3.4 \dots (x+1)\, c_{x+1}\, y.\ cos.\,(x+1)\,\varphi \pm \&c.$$

ciò è facendo $y = o$,

$$x c_x.\ cos.\, x\varphi = e^{x\varphi\sqrt{-1}} + e^{x\varphi\sqrt{-1}} = 2\, cos.\, x\varphi$$

Quindi $c_x = \frac{2}{x}$. Conservando dunque ad y il valore convenuto, avremo

$$log.(m+cos.\varphi) = -log.2y + \frac{2}{1}y.cos.\varphi - \frac{2}{2}y^2 cos.2\varphi + \frac{2}{3}y^3 cos.3\varphi \ldots \pm y\frac{2}{x}y\ cos.x \pm \&c.$$

La determinazione della costante c'_x potrebbe eseguirsi in un altro semplicissimo modo. Riprendiamo la Equazione

$$log.(y^2+2y\,cos.\varphi+1) = c'_1 y\,cos.\varphi - c'_2 y^2 cos.2\varphi + c'^3 cos.3\varphi - \&c. \ldots \pm c'_x y_x cos.x\varphi \mp \&c.$$

e facendovi $\varphi = o$,

$$2\,log.(1+y) = c_1 y - c_2 y^2 + c_3 y^3 - \ldots \pm c_x y^x \mp \&c.$$

$$= 2y - \frac{2y^2}{2} + \frac{2y}{3} \ldots \pm \frac{2y^x}{2} \mp \&c.$$

onde $c_x = \frac{2}{x}$, come sopra.

La serie che con due differenti metodi abbiamo rigorosamente dimostrata, fù conosciuta da Euler, che la ottenne per induzione, come può vedersi nel suo *Calcolo Integrale*.

XV.

Abbiamo ottenuto

$$log.(m+cos.\varphi) = -log.2y + \frac{2}{1}y\,cos.\varphi - \frac{2}{2}y^2\,cos.2\varphi + \frac{2}{}y^3\,cos.3\varphi - \&c.$$

Ed avendosi

$$log.(1+y\,cos.\varphi) = y\,cos\,\varphi - \frac{1}{2}y^2(cos.\varphi)^2 + \frac{1}{3}y^3(cos.\varphi)^3 - \&c.$$

egli è chiaro che la nostra formula potrà più concisamente essere espressa dalla Equazione

$$(E) \ldots\ldots\ldots log.(m+cos.\varphi) = -log.2y + 2\,log.(1+y\,cos.\varphi)$$

purchè dopo di avere sviluppato il secondo membro per le potenze ascendenti di $cos.\varphi$, si applichino come multipli di archi gli espo-

nenti di $\cos.\varphi$. Si osservi che essendo $y = m - \sqrt{(m^2 - 1)}$, sarà ancora $\frac{1}{y} = m + \sqrt{(m^2 - 1)}$, onde facilmente potremo dare alla Equazione (E) la forma

$$\log.(m + \cos.\varphi) = \log.\tfrac{1}{2}(m - \sqrt{m^2 - 1}) + 2\log.((m + \sqrt{m^2 - 1}) + \cos.\varphi)$$

purchè si usino le stesse avvertenze nella evoluzione del secondo membro.

Sia adesso proposto di svolgere in serie per i coseni degli archi moltiplici la funzione più complicata

$$\log.(\cos.\varphi^r + a\cos.\varphi^{r-1} + b\cos.\varphi^{r-2} + \&c. \dots + p)$$

Supponendo che $-m$, $-m'$, $-m''$, ... $-m^{(r)}$ siano le r radici della Equazione

$$t^r + at^{r-1} + bt^{r-2} + \dots\dots + p = 0$$

potremo supporre

$$\log.(\cos.\varphi^r + a\cos.\varphi^{r-1} + b\cos.\varphi^{r-2} + \dots + p) = \log.(m + \cos.\varphi)$$

$$+ \log.(m' + \cos.\varphi) + \log.(m'' + \cos.\varphi) + \dots + \log.(m^{(r)} + \cos.\varphi)$$

Se adesso con i segni y, y_1, y_2 ... y_r indicheremo le quantità $m + \sqrt{(m^2 - 1)}$, $m' + \sqrt{(m'^2 - 1)}$, $m'' + \sqrt{(m''^2 - 1)}$ ... $m^{(r)} + \sqrt{(m^{(r)2} - 1)}$, avremo generalmente

$$\log.(m^{(s)} + \cos.\varphi) = \log.\frac{1}{2y^{(s)}} + 2\log.(y_{(s)} + \cos.\varphi)$$

purchè nella evoluzione del secondo membro si applichi come multiplo di arco ogni esponente di $\cos.\varphi$: con questa stessa condizione, sarà dunque ancora

$$\log.(\cos.\varphi^r + a\cos.\varphi^{r-1} + b.\cos.\varphi^{r-2} \ldots + p) = \log.\frac{1}{2.y} + \log.\frac{1}{2.y_1} + \log.\frac{1}{2.y_2} + \ldots + \log.\frac{1}{2.y_r}$$
$$+ 2\left\{\log.(y + \cos.\varphi) + \log.(y_1 + \cos.\varphi) + \log.(y_2 + \cos.\varphi) + \ldots + \log.(y_r + \cos.\varphi)\right\}$$

ossia

$$\log.(\cos.\varphi^r + a\cos.\varphi^{r-1} + b\cos.\varphi^{r-2} \ldots + p) = \log.\frac{1}{2^r.y.y_1.y_2\ldots.y_r}$$
$$+ 2\log.(y + \cos.\varphi)(y_1 + \cos.\varphi)(y_2 + \cos.\varphi)\ldots\ldots(y_r + \cos.\varphi)$$

Effettuato il prodotto dei fattori

$$(y + \cos.\varphi)(y_1 + \cos.\varphi)(y_2 + \cos.\varphi)\ldots.(y_r + \cos.\varphi)$$

che sono r di numero, giungeremo ad una espressione della forma

$$\cos.\varphi^r + a'\cos.\varphi^{r-1} + b'.\cos.\varphi^{r-2} \ldots + p'$$

ove i coefficienti a', b', ... p' saranno tali, che le quantità $y, y_1, y_2, \ldots.. y_{(r)}$ rappresenteranno le r radici della Equazione

$$t^r + a't^{r-1} + b't^{r-2} + \ldots\ldots + p' = 0$$

Sarà dunque $p' = y y_1 y_2 \ldots\ldots y_r$, e la formula precedente diverrà

$$\log.(\cos.\varphi^r + a\cos.\varphi^{r-1} + b.\cos.\varphi^{r-2} + \ldots + p) = \log.\frac{1}{2^r.p'}$$
$$+ 2.\log.(\cos.\varphi^r + a'\cos.\varphi^{r-1} + b'\cos.\varphi^{r-2} + \ldots + p')$$

purchè dopo di avere sviluppato il secondo membro per le potenze di $\cos.\varphi$, gli esponenti si applichino come multipli dell'arco.

XVI.

Possiamo fino d'ora mostrare un'uso assai osservabile della serie ottenuta per $\log.(m + \cos.\varphi)$. Noi abbiamo

$$\log.(m + \cos.\varphi) = -\log.2y + \frac{2}{1}.y\cos.\varphi - \frac{2}{2}y^2\cos.2\varphi + \frac{2}{3}y^3\cos.3\varphi - \&c. \pm \frac{2}{x}y^x\cos.x\varphi \mp \&c.$$

Si svolgano attualmente in serie per le potenze dei loro archi

tutti i coseni, che sono compresi nel secondo membro di questa Equazione; ed avremo immediatamente, ordinando per le potenze di φ

$$\log.(m+\cos.\varphi)=-\log.2y+2\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\&c.\right\}$$
$$-\frac{2}{2}\varphi^2\left\{y-2y^2+3y^3-4y^4+\&c.\right\}$$
$$+\frac{2}{2.3.4}\varphi^4\left\{y-2^3y^2+3^3y^3-4^3y^4+\&c.\right\}$$
$$-\frac{2}{2.3.4.5.6}\varphi^6\left\{y-2^5y^2+3^5y^3-4^5y^4+\&c.\right\}$$

cioè, osservando che $y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\&c.=\log.(1+y)$

$$\log.(m+\cos.\varphi)=\log.\left\{\frac{y^2+2y+1}{2y}\right\}-\frac{2}{2}\varphi^2\left\{y-2y^2+3y^3-\&c.\right\}$$
$$+\frac{2}{2.3.4}\varphi^4\left\{y-2^3y^2+3^3y^3\&c.\right\}$$
$$-\frac{2}{2.3.4.5.6}\varphi^6\left\{y-2^5y^2+3^5y^3-\&c.\right\}$$
$$+\&c.$$

abbiamo adesso, come è noto

$$\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\&c.$$

Quindi sarà

$$y-2y^2+3y^3-4y^4+\&c.=-y\frac{d\frac{1}{1+y}}{dy}$$

$$y-2^3y^2+3^3y^3-4^3y^4+\&c.=-y\frac{dy\,dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^3}$$

&c.

ove ciascun segno differenziale si riporta a tutte le quantità successive. Sostituendo questi valori nella nuova espressione di $log.(m+cos.\varphi)$, si avrà

$$log.(m+cos.\varphi)=log.\left(\frac{y^2+2y+1}{2y}\right)+\frac{2}{2}\varphi^2 y\frac{d\frac{1}{1+y}}{dy}$$

$$-\frac{2}{2.3.4}\varphi^4\frac{y\,dy\,dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^3}$$

$$+\&c.\ldots\ldots\pm\frac{2}{2.3.4\ldots 2n}\varphi^{2n}\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\frac{1}{1+y}}{dy^{2n-1}}\mp\&c.$$

ossia, osservando che per supposizione abbiamo

$$m=\frac{y^2+1}{2y}$$

otterremo ancora, riducendo

$$\frac{1}{y}log.\left\{\frac{m+cos.\varphi}{m+1}\right\}=\frac{2}{2}\varphi^2\frac{d\frac{1}{1+y}}{dy}$$

$$-\frac{2}{2.3.4}\varphi^4\frac{dy\,dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^3}+\&c.$$

$$\pm\frac{2}{2.3\ldots 2n}.\varphi.^{2n}\frac{dy\,dy\ldots d\frac{1}{1+y}}{dy^{2n-1}}\mp\&c.$$

Moltiplicando per dy, ed integrando, avremo

$$\int\frac{dy}{y}\,log.\left\{\frac{m+cos.\varphi}{m+1}\right\}=cost.+\frac{2}{2}\varphi^2\frac{1}{1+y}$$

$$-\frac{2}{2.3.4}\varphi^4 y\frac{dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^2}+\frac{2}{2.3.4.5.6}\varphi^6\frac{y\,dy\,dy\,dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^4}$$

$$-\&c.\ldots\ldots\pm\frac{2}{2.3\ldots 2n}.\varphi.^{2n}\frac{y\,dy\,dy\ldots d\frac{1}{1+y}}{dy^{2n-2}}\mp\&c.$$

La funzione $\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\frac{1}{1+y}}{d\,y^{2b}}$ rappresenta la somma della serie

$$y - 2^{2b} y^2 + 3^{2b} y^3 - 4^{2b} y^4 + \&c.$$

la quale si riduce a zero se $y = 0$, e se $y = 1$, poichè in questo secondo caso è noto che la serie

$$1 - 2^{2b} + 3^{2b} - 4^{2b} + \&c.$$

è sempre $= 0$, come anche avremo luogo di dimostrare in seguito.

In conseguenza, se nella formula

$$\int \frac{d\,y}{y} \log.\left\{\frac{m + \cos.\,\varphi}{m+1}\right\} = cost. + \frac{2}{2}\,\varphi\,\frac{1}{1+y}$$

$$-\frac{2}{2.3.4}\,\varphi^4.\,\frac{y\,d\,y\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^2}$$

$$+\frac{2}{2.3.4.5.6}\,\varphi^6.\,\frac{y\,d\,y\,d\,y\,d\,y\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^4} - \&c.$$

prenderemo l'integrale tra i limiti $y=0$, $y=1$, a ciascuno di questi limiti svaniranno i coefficienti di φ^4, $\varphi^6 \ldots \varphi^{2n}$,.. all'infinito; ed avremo la formula semplicissima

$$-\frac{\varphi^2}{2} = \int \frac{d\,y}{y} \log.\left\{\frac{m + \cos.\,\varphi}{m+1}\right\}$$

ossia

$$-\frac{\varphi^2}{2} = \int \frac{d\,y}{y} \log.(m + \cos.\,\varphi) - \int \frac{d\,y}{y} \log.(m+1)$$

Ma avendosi

$$m = \frac{y^2+1}{2y}$$

si avrà, sostituendo nel termine $\int \frac{d\,y}{y} \log.(m+1)$ questo valore di m, la formula

$$-\frac{\varphi^2}{2} = -2\int\frac{dy}{y}\log.(1+y) + \int\frac{dy}{y}\log.2y$$

$$+\int\frac{dy}{y}\log.(m+\cos.\varphi)$$

nella quale in luogo di $\log.(m+\cos.\varphi)$ potremo sostituire la serie

$$-\log.2y + \tfrac{2}{1}y\cos.\varphi - \tfrac{2}{2}y^2\cos.2\varphi + \&c.$$

ed in luogo di $\log.(1+y)$ il suo valore

$$y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \&c.$$

ed effettuate le integrazioni tra i convenuti limiti di $y=0$, $y=1$, si otterrà con molta facilità

$$\frac{\varphi^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \&c.$$

$$-\cos.\varphi + \tfrac{1}{4}\cos.2\varphi - \tfrac{1}{9}\cos.3\varphi + \&c.$$

Se in questa serie assai osservabile faremo $\varphi=\pi$, troveremo

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$$

relazione che Euler ottenne il primo per induzione.

XVII.

Riprendiamo la Equazione

$$-\frac{\varphi^2}{2} = -\int\frac{dy}{y}\log.(m+1) + \int\frac{dy}{y}\log.(m+\cos.\varphi)$$

avremo differenziando rapporto a φ

$$\varphi = 2\,\mathrm{sen}\,\varphi\int\frac{dy}{y^2+2y\cos.\varphi+1}$$

Onde apparisce che il rapporto di un arco al suo seno sarà rappresentato dalla formula

$$\frac{\varphi}{sen.\ \varphi} = 2 \int \frac{dy}{y^2 + 2\, y\, cos.\ \varphi + 1}$$

purchè l'Integrale sia preso tra i limiti $y = 0$, $y = 1$.

La funzione $\frac{\varphi}{sen.\ \varphi}$ allorchè $\varphi = 0$ diviene $\frac{0}{0}$; e lo stesso accade in tutti i suoi differenziali all'infinito. Secondo le idee luminose dell'illustre Lagrange, sempre una tal circostanza annunzia un cangiamento di natura nella proposta funzione; e la indole, e la cagione di un tal cangiamento rendesi evidente nella nostra formula, nella quale il resultato $\frac{0}{0}$ indica che i fattori della quantità $y^2 + 2\, \varphi\, cos.\ \varphi + 1$ divengono eguali tra di loro.

XVIII.

Abbiamo ottenuto (13) lo sviluppo in serie per i coseni degli archi moltiplici della funzione $log.\ (1 + n\ cos.\ \varphi)$. Proponghiamoci adesso di svolgere in una serie della stessa natura la funzione $\frac{1}{1 + n\ cos.\ \varphi}$. A tale oggetto facciamo

$$\frac{1}{1 + n\ cos.\ \varphi} = A - A_1\ cos.\ \varphi + A_2\ cos.\ 2\,\varphi - A_3\ cos.\ 3\,\varphi + \&c.$$

E moltiplicando per $1 + n\ cos.\ \varphi$, e riducendo i prodotti dei coseni in coseni di archi multipli, avremo

$$\begin{aligned} 1 = A + A\, n.\ cos.\varphi - \tfrac{1}{2} A_1.\ n\ cos.\, 2\,\varphi + \tfrac{1}{2} A_2\, n\, cos.\ 3\,\varphi - \&c. \\ - \tfrac{1}{2} A_1\, n - A_1.\ cos.\ \varphi + A_2\ cos.\ 2\,\varphi - A_3\ cos.\ 3\,\varphi + \&c. \\ + \tfrac{1}{2} A_2\, n\, cos.\ \varphi - \tfrac{1}{2} A_3.\ n\ cos.\ 2\,\varphi + \tfrac{1}{2} A_4\, n.\, cos.\ 3\,\varphi - \&c. \end{aligned}$$

Monsieur Le Chevalier.

Personne mieux que vous peutt savoir ce que c'est que la renommée. Vous savez aussi qu'elle attire souvent de biens méchantes affaires. Vous en aurez une nouvelle épreuve de moi. Je viens de publier un ouvrage sur les Séries, et je vous en demande votre jugement. c'est dans votre célébrité, et dans vos ouvrages que mon hardiesse doit trouver excuse; je me flatte que vous voudrez bien me l'accorder en vous persuadant que mon importunité est dictée par l'estime et l'admiration que j'ai pour un des Geometres les plus illustres dont l'Europe s'honore.

Vous observerez, M.r le chevalier, en parcourant mon livre, une digression où j'ai exposée une démonstration bien simple des formules fondamentales de la ~~[illegible]~~ trigonométrie rectiligne. Après l'impression j'ai trouvée une manière d'y parvenir encore plus simple, et qui s'étend, ainsi que la première, à ~~[illegible]~~ la Circonference sans exiger une construction nouvelle. Si vous souhaitez de la connoître, je vous la remettrai au plutôt.

A Monsieur

Mr. Le chevalier A. M. Legendre

Membre de l'Institut de France

&c. &c. &c.

Otterremo quindi

$$nA_1 - 2A + 2 = 0$$

$$nA_2 - 2A_1 + 2nA = 0$$

$$(c) \ldots\ldots\ldots nA_3 - 2A_2 + nA_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$nA_x - 2A_{x-1} + nA_{x-2} = 0$$

ove conviene osservare che questa generale Equazione incomincia ad aver luogo per i soli valori di $x > 2$.
Abbiamo da essa.

$$A_x = c\left(\frac{1+\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^x + c'\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^x$$

ove conviene determinare le due costanti arbitrarie c, c'. Alla prima delle Equazioni (c) che sono infinite di numero, aggiungasi la seconda moltiplicata per h, la terza moltiplicata per h^2, e così in seguito. Avremo

$$0 = -2A + 2 + 2nAh + A_1(n - 2h + nh^2) + A_2 h(n - 2h + nh^2)$$
$$+ A_3 h^2 (n - 2h + nh^2) + \&c.$$

Alla quale sodisfaremo facendo

$$(2nh - 2)A + 2 = 0$$

$$n - 2h + nh^2 = 0$$

Di quì abbiamo $h = \frac{1 \pm \sqrt{(1-n^2)}}{n}$; $A = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-n^2)}}$; Ma dovendo essere $A = 1$, quando $n = 0$, sarà generalmente $A = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}}$.

Trovata A, la prima delle Equazioni (c) ci darà $A_1 = 2\,\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n\sqrt{(1-n^2)}}$;

e la seconda $A_2 = 2\,\frac{(1-\sqrt{(1-n^2)})}{n^2\ \sqrt{(1-n^2)}}$.

Sostituiti successivamente questi valori nel generale di A_x, troveremo $c=o$, $c'=\frac{2}{\sqrt{(1-n^2)}}$; onde sarà

$$A_x = \frac{2}{\sqrt{(1-n^2)}}\cdot\left\{\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right\}^x = \frac{2\,k^x}{\sqrt{(1-n^2)}}$$

facendo $\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n} = k$. Sarà quindi

$$\frac{1}{1+n\,.\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}}\left\{1-2k.\cos.\varphi+2\,k^2\cos.2\varphi-2k^3\cos.3\varphi+\&c.\right\}$$

Moltiplicando per $d\varphi$, ed integrando si otterrà

$$\int\frac{d\varphi}{1+n\cos.\varphi} = \text{cost.}+\frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}}\left\{\varphi-2k\,sen.\varphi+\frac{2k^2}{2}sen.2\varphi-\frac{2\,k^3}{3}sen.3\varphi+\&c.\right\}$$

Ed il valore di questo integrale tra i limiti $\varphi=o$, $\varphi=\pi$ sarà $\frac{\pi}{\sqrt{(1-n^2)}}$.

XIX.

Ci sia permesso di osservare quì di passaggio che il metodo con cui abbiamo nel numero precedente determinate le costanti A, A_1 può applicarsi alla integrazione delle Equazioni a differenze finite in un modo più diretto di quello che comunemente si pratica. Sia infatti proposta la Equazione lineare del secondo ordine

$$y_x + A\,y_{x-1} + B\,y_{x-2} = o$$

ove A, B siano costanti. Facendo successivamente $x = 2, 3, 4$ &c. avremo questa serie di Equazioni

$$y_2 + Ay_1 + By_0 = o$$

(A) . . . .
$$y_3 + Ay_2 + By_1 = o$$
$$y_4 + Ay_3 + By_2 = o$$
$$\vdots$$
$$y_x + Ay_{x-1} + By_{x-2} = o$$

Ed è chiaro che otterremo l' integrale primo della proposta se col mezzo di esso potremo eliminare tutte le quantità y_0, y_1, y_2 : . . . y_{x-2}, y_{x-1}, y_x ad eccezione delle due prime, e delle due ultime. Per questo oggetto alla prima delle Equazioni (A) aggiungasi la seconda moltiplicata per $\frac{1}{t}$, la terza moltiplicata per $\frac{1}{t^2}$, la quarta moltiplicata per $\frac{1}{t^3}$, e così in seguito fino all' ultima, ed avremo

$$A + \frac{B}{t}y_1 + By_0 + y_2\left\{1 + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}\right\} + \frac{y_3}{t}\left\{1 + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}\right\} + \frac{y_4}{t^2}\left\{1 + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}\right\}$$

$$+ \ldots + \frac{y_{x-2}}{t^{x-4}}\left\{1 + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2}\right\} + \frac{y_{x-1}}{t^{x-3}}\left\{1 + \frac{A}{t}\right\} + \frac{y_x}{t^{x-2}} = o$$

Se adesso facciamo

$$t^2 + At + B = o$$

e sia t' una radice di questa Equazione, sarà l' Integrale cercato

$$y_x + \left\{t' + A\right\}y_{x-1} + \left\{\left(A + \frac{B}{t'}\right)y_1 + By_0\right\}t'^{x-2} = o$$

Se chiamiamo t'' la seconda radice della Equazione

$$t^2 + At + B = o$$

avremo $A + t' = -t''$; $B = t' . t''$; $A + \frac{B}{t'} = -t'$; e l' integrale primo sarà più semplicemente così espresso

$$y_x - t'' y_{x-1} = (y_1 - t'' y_0)\, t'^{x-1}$$

Cangiando t' in t'' avremo l' altro Integrale primo

$$y_x - t' y_{x-1} = (y_1 - t' y_0)\, t''^{x-1}$$

Ed eliminando da questi l' y_{x-1}, otterremo l' integrale secondo

$$y_x = \frac{y_1 - t'' y_0}{t' - t''} t'^x + \frac{y_1 - t' y_0}{t'' - t'}\, t''^x$$

Se le due radici t', t'' sono eguali i due Integrali primi essendo affatto simili, non si può da essi eliminare y_{x-1}. Riprendiamo il caso generale, e sia $t'' = t' + \omega$; i due Integrali primi diventeranno

$$y_x - (t' + \omega) y_{x-1} = [y_1 - (t' + \omega) y_0]\, t'^{x-1}$$

$$y_x - t' y_{x-1} = (y_1 - t' y_0) \left\{ t'^{x-1} + (x-1)\, \omega\, t'^{x-2} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \omega^2 t'^{x-3} + \&c. \right\}$$

e sottraendo l' uno dall' altro, e dividendo per ω, avremo

$$y_{x-1} = y_0 t'^{x-1} + \left\{ y_1 - t' y_0 \right\} \left\{ (x-1) t'^{x-2} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \omega t'^{x-3} + \&c. \right\}$$

e ponendo $x + 1$ in luogo di x

$$y_x = y_0 t'^x + (y_1 - t' y_0) \left\{ x\, t'^{x-1} + x \frac{(x-1)}{2} \omega\, t'^{x-2} + \&c. \right\}$$

Il quale sotto altra forma, rappresenta l'Integrale della proposta. Quando $t' = t''$, è $\omega = o$; dunque in questo caso

$$y_x = y_o t'^x + x(y_1 - t' y_o) . t'^{x-1}$$

È inutile avvertire che lo stesso metodo si applica senza eccezione a tutte le Equazioni lineari di qualunque ordine a coefficienti costanti.

Qualchè volta può questo metodo stesso applicarsi ancora a quel genere di Equazioni che comprendono le differenze parziali finite, ed infinitesime di una funzione rapporto a due distinte variabili; Equazioni che il primo ha trattate con dottissima analisi il Sig. Paoli, e delle quali ha mostrati i moltiplici, ed importantissimi usi nel Calcolo Integrale. Sia proposta la Equazione

$$z_{x+1} = A_y z_x - A_y C_y \frac{dz_x}{dy} + C_y \frac{dz_{x+1}}{dy}$$

e facendovi successivamente $x = 0, 1, 2, 3,$ &c. avremo questa serie di Equazioni

$$z_1 - A_y . z_0 + A_y . C_y . \frac{dz_0}{dy} - C_y \frac{dz_1}{dy} = o$$

$$z_2 - A_y . z_1 + A_y . C_y . \frac{dz_1}{dy} - C_y \frac{dz_2}{dy} = o$$

$$z_3 - A_y . z_2 + A_y . C_y . \frac{dz_2}{dy} - C_y . \frac{dz_3}{dy} = o$$

$$z_4 - A_y . z_3 + A_y . C_y . \frac{dz_3}{dy} - C_y . \frac{dz_4}{dy} = o$$

$$\vdots$$

$$z_{x+1} - A_y . z_x + A_y . C_y . \frac{dz_x}{dy} - C_y . \frac{dz_{x+1}}{dy} = o$$

Se alla prima di queste Equazioni aggiungeremo la seconda moltiplicata per t, la terza moltiplicata per t^2, la quarta moltiplicata per t^3, e così seguitando fino all' ultima, avremo la Equazione

$$-A_y . z_0 + A_y . C_y . \frac{d z_0}{d y} + z_1 (1 - A_y t) + z_2 t (1 - A_y . t)$$

$$+ z_3 t^2 (1 - A_y t) + \&c.$$

$$- C_y \frac{d z_1}{d y} (1 - A_y t) - C_y \frac{d z_2}{d y} . t (1 - A_y t) - C_y \frac{d z_3}{d y} t^2 (1 - A_y t) - \&c.$$

$$+ t^{x-1} z_{x+1} - C_y t^{x-1} \frac{d z_{x+1}}{d y} = o$$

Facciamo $1 - A_y . t = o$; onde $t = \frac{1}{A_y}$; e sostituendo questo valore, si avrà

$$C_y . \frac{d z_{x+1}}{d y} - z_{x+1} + A_y^x \left\{ z_0 - C_y \frac{d z_0}{d y} \right\} = o$$

ove z_0 è una funzione arbitraria di y. Integrando questa Equazione differenziale lineare del primo ordine, si avrà

$$z_{x+1} = e^{\int \frac{d y}{C_y}} \left\{ M + \int A_y^x \, d y \left(C_y \frac{d z_0}{d_y} - z_0 \right) e^{-\int \frac{d y}{C}} . \frac{1}{C_y} \right\}$$

ove M è una costante introdotta dalla Integrazione, e che sarà una funzione di x. Pertanto, facendo per maggior semplicità

$$e^{-\int \frac{d y}{C_y}} . \frac{1}{C_y} \left(C_y \frac{d z_0}{d y} - z_0 \right) = F y$$

essendo Fy una funzione arbitraria di y, e ponendo $M = \Psi x$, sarà ancora

$$z_{x+1} = e^{\int \frac{dy}{C_y}} \int A^x dy \, Fy + \Psi x \, . \, e^{\int \frac{dy}{C_y}}$$

la quale Equazione rappresenta il completo integrale della proposta, perchè comprende le due funzioni arbitrarie $F y$, Ψx.

Il metodo di cui ci siamo prevalsi per la integrazione della Equazione

$$z_{x+1} = A_y \, . \, z_x - A_y \, . \, C_y \, . \, \frac{d z_x}{d \varphi} + C_y \, . \, \frac{d z_{x+1}}{d y}$$

non è per altro il solo che può condurre all' ottenuto completo integrale. Ed infatti la proposta può mettersi sotto la forma

$$z_{x+1} - C_y \, . \, \frac{d z_{x+1}}{d \varphi} = A_y \left(z_x - C_y \frac{d z_{x+1}}{d \varphi} \right)$$

Pertanto se faremo

$$z_x - C_y \, . \, \frac{d z_x}{d y} = u_x$$

sarà

$$u_{x+1} = A_y \, u_x$$

E quindi la completa evoluzione della proposta è ridotta a dipendere da una Equazione differenziale ordinaria, e da una Equazione a differenze finite.

XX.

Dopo questa digressione, alla quale ci ha condotti il metodo con cui abbiamo determinate la costanti A, A_1 nella serie

$$\frac{1}{1+n\cos.\varphi} = A - A_1 \cos.\varphi + A \cos.2\varphi - A_2 \cos.3\varphi + \&c.$$

allorchè i coefficienti A, A_1, A_2, &c. dipendevano da una Equazione a differenze finite, riprendiamo la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\varphi}$ e vediamo di svilupparla in una serie ordinata per i coseni degli Archi moltiplici, prevalendoci del solo Calcolo differenziale, appunto come abbiamo fatto per la funzione $log.(1+n\cos.\varphi)$. (XIV).

Consideriamo a tale oggetto la formula $\frac{1}{m+\cos.\varphi}$ alla quale si riduce agevolmente la proposta; e facendo $z = \frac{1}{m+\cos.\varphi}$, facilmente avremo differenziando

$$z = \frac{1}{m+\cos.\varphi}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) = \frac{2+m\cos.\varphi-(\cos.\varphi)^2}{(m+\cos.\varphi)^3}$$

$$\left(\frac{dz}{dm}\right) = -\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^2}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) = \frac{2}{(m+\cos.\varphi)^3}$$

Ed alla somma delle due prime di queste Equazioni aggiungendo la terza moltiplicata per $-3m$, e la quarta moltiplicata per $\frac{m^2-1}{2}$, otterremo la Equazione

$$(E) \ldots . (m^2-1)\left(\frac{d^2 z}{d m^2}\right)+3 m\left(\frac{d z}{d m}\right)+\left(\frac{d^2 z}{d \varphi^2}\right)+z=o$$

Facciamo ora come sopra

$$z=\frac{1}{(m+cos.\, \varphi)}=A+A_1 \, cos.\, \varphi+A_2 \, cos.\, 2\, \varphi+\ldots\ldots$$

e sostituendo nella Equazione (E) in luogo di z questa serie, e facendo $=o$ separatamente i coefficienti dei diversi coseni, si avrà per determinare A_x

$$\frac{d^2 A_x}{d m^2}-\frac{3 m}{1-m^2} \frac{d A_x}{d m}-\frac{1-x^2}{1-m^2} A_x=o$$

di cui l'Integrale facilmente trovasi essere

$$A_x=\frac{c_x}{\sqrt{(m^2-1)}}(m+\sqrt{(m^2-1)})^x+\frac{c'_x}{\sqrt{(m^2-1)}}(m-\sqrt{(m^2-1)})^x$$

ed avremo anche

$$A=\frac{e}{\sqrt{(m^2-1)}}+e'$$

Sostituendo questi valori nella serie che abbiamo scelta per $z=\frac{1}{m+cos.\, \varphi}$, si avrà

$$\frac{1}{m + \cos.\varphi} = \frac{e}{\sqrt{(m^2 - 1)}} + e'$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}} \Big[\{ c_1 (m + \sqrt{(m^2-1)}) + c'_1 (m - \sqrt{(m^2-1)}) \} \cos.\varphi$$

$$+ \{ c_2 (m + \sqrt{(m^2-1)})^2 + c'_2 (m - \sqrt{(m^2-1)})^2 \} \cos.2\varphi$$

$$+ \ldots\ldots + \{ c_x (m + \sqrt{(m^2-1)})^x + c'_x (m - \sqrt{(m^2-1)})^x \} \cos.x\varphi + \&c. \Big]$$

Per determinare le quantità e, e', c, c_1, $c_2 \ldots c'$, c'_1, c'_2 &c. che sono tutte arbitrarie introdotte dalla Integrazione, facciamo in questa Equazione $m = \frac{1}{n}$, ed avremo riducendo

$$\frac{1}{1 + n\cos.\varphi} = \frac{e}{\sqrt{(1-n^2)}} + \frac{e'}{n}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}} \Big[\Big\{ c_1 \Big(\frac{1 + \sqrt{(1-n^2)}}{n} \Big) + c'_1 \Big(\frac{1 - \sqrt{(1-n^2)}}{n} \Big) \Big\} \cos.\varphi$$

$$+ \Big\{ c_2 \Big(\frac{1 + \sqrt{(1-n^2)}}{n} \Big)^2 + c'_2 \Big(\frac{1 - \sqrt{(1-n^2)}}{n} \Big)^2 \Big\} \cos.2\varphi + \ldots$$

$$+ \Big\{ c_x \Big(\frac{1 + \sqrt{(1-n^2)}}{n} \Big)^x + c'_x \Big(\frac{1 - \sqrt{(1-n^2)}}{n} \Big)^x \Big\} \cos.x\varphi + \&c. \Big]$$

Questa Equazione dovrà ridursi identica se $n = o$; sarà dunque $e' = o$, ed inoltre dovranno esser nulle tutte le quantità c_1, c_2, $c_3 \ldots$ &c. per motivo della n nel denominatore; e sarà anche $e = 1$. Previe queste determinazioni, sarà

$$\frac{1}{m + \cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}} \big(1 + c'_1 (m - \sqrt{(m^2-1)}) - \cos.\varphi$$

$$c'_2 (m - \sqrt{(m^2-1)})^2 \cos.2\varphi \ldots. + c'_x (m - \sqrt{(m^2-1)})^x \cos.x\varphi + \&c.$$

Facciamo adesso

$$m - \sqrt{(m^2-1)} = y$$

e sarà $m=\frac{1+y^2}{2y}$; sostituendo questi valori, e moltiplicando per $\sqrt{(m^2-1)}$, si avrà trasportando nel primo membro l'unità

$$\frac{y+\cos.\varphi}{y^2+2y\cos.\varphi+1}=-\frac{c'_1}{2}\cos.\varphi-\frac{c'_2}{2}y\cos.2\varphi$$

$$-\frac{c'_3}{2}y^2\cos.3\varphi\ldots-\frac{c'_x}{2}y^{x-1}\cos.x\varphi-\ldots$$

e posto $\varphi=0$

$$\frac{1}{1+y}=-\frac{c'_1}{2}-\frac{c'_2}{2}y-\frac{c'_3}{2}y^2+\ldots-\frac{c'_x}{2}y^{x-1}-\ldots$$

$$=1-y+y^2-\&c.\ldots\pm y^{x-1}\mp\&c.$$

onde $c'_x=\pm 2$, ove il segno superiore dovrà prendersi se x è pari, e l'inferiore se x è dispari.

Quindi sostituendo, e conservando ad y il valore convenuto, si avrà

$$\frac{1}{m+\cos.\varphi}=\frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}\Big[1-2y\cos.\varphi+2y^2\cos.2\varphi$$

$$-2y^3\cos.3\varphi+\ldots\pm 2y^x\cos.x\varphi\mp\&c.\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}\,\frac{1-y\cos.\varphi}{1+y\cos.\varphi}$$

purchè nella evoluzione di questa frazione per le potenze di $\cos.\varphi$, si pongano gli esponenti di questa quantità come multipli dell'arco φ.

XXI.

Potremo adesso con somma facilità svolgere in una serie ordi-

nata per i coseni degli archi moltiplici una potenza qualunque di $\frac{1}{m+\cos.\varphi}$. Abbiamo infatti

$$\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^n}=\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,d^n\,\frac{\frac{1}{m+\cos.\varphi}}{dm^n}$$

dove prenderemo il segno positivo se n è pari, ed il negativo se n è dispari. Ed essendo $\pm\,2\,\frac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}$ il termine generale dello sviluppo di $\frac{1}{m+\cos.\varphi}$, chiamando B_x quello della funzione $\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^n}$, sarà nel caso di n pari

$$B_x=+\frac{2}{1.2\ldots(n-1)}\,d^n\,\frac{\frac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{dm^n}$$

e nel caso di n dispari

$$B_x=\mp\frac{2}{1.2\ldots(n-1)}\,d^n\,\frac{\frac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{dm^n}$$

Ove il segno superiore converrà ad x pari, e l' inferiore ad x dispari.

Avendosi parimente integrando da $\varphi=0$ fino a $\varphi=\pi$

$$\int\frac{dy}{m+\cos.\varphi}=\frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}$$

sarà tra i limiti stessi

$$\int \frac{dy}{(m+\cos.\varphi)^n} = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\, d^n \frac{\frac{1}{\sqrt{(m-1)^2}}}{d\,m^n}$$

Ove il segno superiore conviene ad n pari, e l'inferiore ad n dispari.

Questi risultati sono di poca utilità sotto questa forma, specialmente se n è un numero un poco elevato; ma vedremo in seguito il modo di ottenerli sotto un più comodo aspetto.

XXII.

Noi ci siamo fino ad ora occupati della evoluzione in serie per i coseni degli archi multipli di φ di alcune delle più semplici funzioni comprese nella forma generale F $(m+\cos.\varphi)$. Ma se vorremo esaminare con maggior generalità la natura dei problemi che ci occupano, consideriamo la funzione F $(m+\cos.\varphi)$, e proponghiamoci di svolgerla in serie per i coseni degli archi moltiplici.

Noi abbiamo, come è noto

$$\cos.\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}.$$

Quindi, se per maggior semplicità faremo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = a$, si avrà

$$\cos.\varphi = \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

e la funzione F $(m+\cos.\varphi)$ diverrà F $\left(m + \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right)$, la quale dovrà svolgersi in una serie ordinata per le quantità $a + \frac{1}{a}$, $a^2 + \frac{1}{a^2}$ &c.

Abbiamo per il Teorema di Taylor

$$F\left(m+\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right)=Fm+\left(a+\frac{1}{a}\right)F'm+\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}.\ \frac{F''m}{2^{2}}$$

$$+\frac{1}{2\,.\,3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^{3}\frac{F'''m}{2^{3}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2\,.\,3\ldots n}\,.\left(a+\frac{1}{a}\right)^{n}\frac{F^{(n)}\,m}{2^{n}}+\ldots\ldots$$

ove $F^{(n)}\ m$ indica la quantità $\frac{d^n\ F^m}{d\ m^n}$. Nel caso di n pari il binomio $\left(a+\frac{1}{a}\right)^n$ conterrà un termine medio indipendente da a; e sarà questo termine medio

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\,\frac{n+2}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\frac{n}{2}}$$

Ed in questo caso medesimo, i termini equidistanti dal medio contenendo le medesime potenze di a. e di $\frac{1}{a}$ moltiplicate per uno stesso coefficiente, sarà il termine generale dello sviluppo di $\left(a+\frac{1}{a}\right)^n$ ordinato per le quantità $a+\frac{1}{a}$, $a^2+\frac{1}{a^2}$ &c. della forma

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-h+1)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots h}\left(a^{n-2h}+\frac{1}{a^{n-2h}}\right)$$

Nel caso poi di n dispari, questo termine generale sarà della forma stessa, ma nel totale sviluppo mancherà il termine medio indipendente da a.

Con queste riflessioni, potremo molto semplicemente ordinare la serie.

$$F\left(m+\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right)=F\ (m+\left(a+\frac{1}{a}\right).\frac{F'm}{2}+\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\frac{F''m}{2^2}$$

$$+\frac{1}{2.3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3\frac{F'''m}{2^3}+\text{\&c.}$$

per le quantità $a+\frac{1}{a}$, $a^2+\frac{1}{a^2}$, $a^3+\frac{1}{a^3}$, &c. E supponendo

$$F\left(m+\tfrac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right)=A+\tfrac{1}{2}A_1\left(a+\frac{1}{a}\right)+\tfrac{1}{2}A_2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}A^3\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$$

$$+\ldots\ldots+\tfrac{1}{2}A_x\left(a^x+\frac{1}{a^x}\right)+\ldots\ldots$$

Facilmente troveremo che i coefficienti A, A_1, A_2....... A_x sono determinati dalle seguenti Equazioni

$$A=Fm+\frac{F''m}{2^2}+\frac{1}{2^2}\frac{F^{IV}}{2^4}+\frac{1}{2^2.3^2}.\frac{F^{VI}m}{2^6}+\frac{1}{2^2.3^2.4^2}.\frac{F^{VIII}m}{2^8}+\ldots$$

$$\frac{A_1}{2}=\frac{F'm}{2}+\frac{1}{2}\frac{F'''m}{2^3}+\frac{1}{2^2.3}\frac{F^{V}m}{2^5}+\frac{1}{2^2.3^2.4}\frac{F^{VII}m}{2^7}+\ldots$$

$$\frac{A_2}{2}=\frac{1}{2}\frac{F''m}{2^2}+\frac{1}{2.3}.\frac{F^{IV}m}{2^4}+\frac{1}{2^2.3.4}.\frac{F^{VI}m}{2^6}+\ldots\ldots$$

$$(K)\ldots\frac{A_3}{2}=\frac{1}{2.3}\frac{F'''m}{2^3}+\frac{1}{2.3.4}.\frac{F^{V}m}{2^5}+$$

$$\vdots$$

$$\frac{A_x}{2}=\frac{1}{2.3\ldots x}\frac{F^x}{2^x}+\frac{1}{2.3\ldots(x+1)}\frac{F^{(x+1)}}{2^{x+2}}+$$

XXIII.

Queste serie possono facilmente verificarsi, facendo attenzione ad una legge generale che regna tra i coefficienti $A, A_1, A_2 \ldots A_x$. Avendosi infatti

$$F\left(m + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right) = A + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)A_1 + \tfrac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)A_2 + \ldots\ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(a^x + \frac{1}{a^x}\right)A_x + \ldots\ldots;$$

sarà, differenziando rapporto ad a

$$\tfrac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)F'\left(m + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)A_1 + \tfrac{2}{2}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)A_2$$

$$+ \tfrac{3}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)A_3 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x}{2}\left(a^x - \frac{1}{a^x}\right)A_x + \ldots\ldots\ldots$$

ma si ha ancora

$$F'\left(m + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right) = \frac{dA}{dm} + \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\frac{dA_1}{dm}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\frac{dA_2}{dm} + \text{\&c.}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(a^x + \frac{1}{a^x}\right)\frac{dA_x}{dm} + \text{\&c.}$$

Quindi sostituendo nella formula precedente questo valore di

$F\left(m+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right)$, otterremo la Equazione

$$\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)A_1+\frac{2}{2}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)A_2+\frac{3}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)A_3+\ldots\ldots$$

$$+\frac{x}{2}\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)A_x+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left\{\frac{dA}{dm}+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{dA_1}{dm}+\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\frac{dA_2}{dm}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+\frac{1}{2}\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)\frac{dA_x}{dm}+\&c.\right\}$$

osserviamo adesso che qualunque sia n abbiamo

$$\left(a^x+\frac{1}{a^x}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)=a^{x+1}-\frac{1}{a^{x+1}}-\left(a^{x-1}-\frac{1}{a^{x-1}}\right)$$

e facilmente vedremo che la nostra Equazione si trasformerà nella seguente

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)A_1+2\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)A_2+3\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)A_3+\ldots\ldots$$

$$+x\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)A_x+\&c.$$

$$+(x+1)\left(a^{x+1}-\frac{1}{a^{x+1}}\right)A_{x+1}+\&c.$$

$$=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left\{\frac{dA}{dm}-\frac{dA_2}{dm}\right\}+\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)\left\{\frac{dA_1}{dm}-\frac{dA_3}{dm}\right\}+\&c.+\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(a^{x+1}-\frac{1}{a^{x+1}}\right)\left\{\frac{dA_x}{dm}-\frac{dA_{x+2}}{dm}\right\}+\&c.$$

Confrontando adesso i coefficienti delle quantità $a - \frac{1}{a}$, $a^2 - \frac{1}{a^2}$, &c. otterremo

$$2(x+1)A^{x+1} = \frac{dA_x}{dm} - \frac{dA_{x+1}}{dm} + 1$$

Equazione alla quale soddisfaranno le serie (K) che nel precedente articolo abbiamo ottenute (XXII).

XXIV.

Ma se vorremo conoscere più da vicino la natura delle quantità A, A_1, A_2 . . . . A_x, ovvero delle serie (K) che le rappresentano, e la scambievole loro dipendenza, prendiamo a considerare la serie infinita

$$z = Fm + y\frac{F''m}{2^2} + \frac{y^2}{2^2}\frac{F^{IV}m}{2^4} + \frac{y^3}{2^2.3^2}\cdot\frac{F^{VI}m}{2^6} + \dots\dots + \frac{y^h}{2^2.3^2.h^2}\cdot\frac{F^{(2h)}}{2^{2h}} + \&c.$$

Se la confronteremo con la prima della serie (K), vedremo che nel caso di $y = 1$, sarà $z = A$. Differenziando il valore generale di z rapporto ad y, avremo

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{F''m}{2^2} + \frac{y}{2}\frac{F^{IV}m}{2^4} + \frac{y^2}{2^2.3}\frac{F^{VI}m}{2^6} + \&c.$$

Se vi faremo $y = 1$, e paragoneremo il resultato con la seconda delle serie (K), troveremo

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{2^2}\frac{dA_1}{dm}$$

onde

$$A_1 = 2^2 \int \left(\frac{d\,z}{d\,y} \right) d\,m$$

purchè si faccia $y = 1$, dopo le differenziazioni. Con questa medesima condizione si avrà

$$\left(\frac{d^2 z}{d\,y^3} \right) = \frac{1}{2} \frac{F^{IV} m}{2^4} + \frac{1}{2 \,.\, 3} \cdot \frac{F^{VI} m}{2^6} + \frac{1}{2^2 3 \,.\, 4} \cdot \frac{F^{VIII} m}{2^8} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2^3} \frac{d^2 A^2}{d\,m^2}$$

$$\left(\frac{d^3 z}{d\,y^3} \right) = \frac{1}{2 \,.\, 3} \cdot \frac{F^{VI} m}{2^6} + \frac{1}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} \frac{F^{VIII} m}{2^8} + \ldots\ldots = \frac{1}{2^4} \frac{d^3 A_3}{d\,m^3}$$

e generalmente, nel caso di $y = 1$,

$$\left(\frac{d^x z_x}{d\,y^x} \right) = \frac{1}{2^{x+1}} \frac{d^x A_x}{d\,m^x}$$

e quindi

$$A_x = 2^{x+1} \int^x \left(\frac{d^x z}{d\,y^x} \right) d\,m^x$$

Pertanto tutto consisterà nella ricerca della somma della serie

$$z = F m + y \frac{F'' m}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} \frac{F^{IV} m}{2^4} + \ldots\ldots$$

XXV.

Abbiamo trovato che il primo termine A è determinato dalla serie

$$A = Fm + \frac{1}{2} F'' m + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{F^{IV} m}{2^4} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{F^{VI} m}{2^6} + \ldots\ldots$$

Da questa espressione, immediatamente otterremo gli Integrali definiti di una qualsivoglia potenza del coseno. Abbiamo infatti, integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$,

$$A = \int \frac{F(m + \cos.\,\varphi)\,d\varphi}{\pi}$$

ovvero

$$A = Fm + \int \cos.\,\varphi \cdot d\varphi \cdot F' m + \int \frac{(\cos\,\varphi)^2\,d\varphi}{2} \cdot F'' m$$

$$+ \int \frac{(\cos.\,\varphi)^3\,d\varphi}{2 \cdot 3} \cdot F''' m + \&c.$$

ove gli integrali devono essere estesi da $\varphi = 0$ fino a $\varphi = \pi$. Confrontando questo valore di A col precedente, sarà, se h è pari

$$\int (\cos.\,\varphi)^h\,d\varphi = \frac{\pi}{2^h} \cdot \frac{\left(\frac{h}{2} + 1\right)\left(\frac{h}{2} + 2\right) \ldots\ldots h}{1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots \frac{h}{2}}$$

e se h è impari

$$\int \cos.\,\varphi^h\,d\varphi = 0$$

con questi resultati, più facilmente giungeremo alle proprietà della serie

$$z = Fm + y \cdot \frac{F'' m}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} \frac{F^{IV} m}{2^4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{y^h}{2^2 \cdot 3^2 \ldots h^2} \cdot \frac{F^{(2h)} m}{2^{2h}} + \&c.$$

dalla quale dipendono tutti i coefficienti $A, A_1, A_2 \ldots\ldots A_x$ della espressione

$$F(m + \cos.\varphi) = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots$$

XXVI.

Ed infatti, abbiamo primieramente

$$F(m + u\cos.\varphi) = Fm + u\cos.\varphi\,.\,F'm + \frac{u^2\cos.\varphi^2}{2}F''m + \frac{u^3\cos.\varphi^3}{2\,.\,3}F'''m + \&c.$$

moltiplicando per $d\varphi$, ed integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ si otterrà, dividendo per π

$$\frac{\int F(m + u\cos.\varphi)\,d\varphi}{\pi} = Fm + u^2\,.\,\frac{F''m}{2^2} + \frac{u^4}{2^2}\,.\,\frac{F^{IV}m}{2^4} + \frac{u^6}{2^2\,.\,3^2}\,.\,\frac{F^{VI}m}{2^6} + \&c.\ldots\ldots + \frac{u^{2h}}{2^2.3\ldots h^2}\;\frac{F^{(2h)}m}{2^{2h}} + \ldots\ldots$$

ciò è facendo $u = \sqrt{y}$

$$\frac{(Fm + \sqrt{y}\,.\,\cos.\varphi)}{\pi}\,d\varphi = Fm + y\,\frac{F''m}{2^2} + \frac{y^2}{2^2}\,.\,\frac{F^{IV}m}{2^4} + \ldots\ldots + \frac{y^h}{2^2.3^2\ldots h^2}\,.\,\frac{F^{(2h)}m}{2^{2h}} + \ldots\ldots$$

la quale infinita serie è identica con quella che esprime il valore di z. Sarà pertanto

$$z = \frac{\int F(m + \sqrt{y} \cdot \cos. \varphi)}{\pi} \cdot d\varphi$$

integrando al solito tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

Ottenuto il valore di z, facilmente avremo quello del termine generale A_x della serie che esprime la funzione $F(m + \cos.\varphi)$ svolta per i coseni degli archi moltiplici. Abbiamo infatti veduto essere (XXIV).

$$A_x = 2^{x+1} \int^x \left(\frac{d^x z}{d y^x}\right) d m^x$$

purchè si faccia $y = 1$ dopo le differenziazioni. Sostituendovi in luogo di z il suo valore, sarà anche

$$A_x = \frac{2^{x+1}}{\pi} \int^x d m^x \int \left(\frac{d^x F(m + \sqrt{y} \cdot \cos. \varphi)}{d y^x}\right) d\varphi$$

Ciò è per l'indipendenza delle variabili

$$A_x = \frac{2^{x+1}}{\pi} \left\{ \frac{d^x \cdot \int^x d m^x \int F(m + \sqrt{y} \cdot \cos. \varphi) d\varphi}{d y^x} \right\}$$

ove l' integrale $\int F(m + \sqrt{y} \cdot \cos. \varphi)$ deve prendersi tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, e dove deve essere supposto $y = 1$, dopo eseguite le differenziazioni rapporto ad esso.

Vedesi dunque che tutti i coefficienti A, A_1, $A_2 \ldots A_x$ dipendono da uno stesso integrale definito, e che gli uni dagli altri differiscono per le integrazioni e differenziazioni che sopra di questo conviene eseguire rapporto a due distinte variabili.

XXII.

Noi potremo avere il valore del termine generale A_x anche sotto una più semplice forma. A tale oggetto riprendiamo le due

Equazioni

$$A_x = 2^{x+1} \int d^x m^x \left(\frac{d^x z}{d y^x}\right)$$

$$z = \int \frac{F(m + \sqrt{y} . \cos\varphi).d\varphi}{\pi}$$

poi avremo differenziando rapporto ad y questo valore di z,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \int \frac{\cos.\varphi . d\varphi F'(m + \sqrt{y} \cos.\varphi)}{\pi}$$

moltiplicando per dm, ed integrando rapporto a dm, si avrà, osservando che l'indipendenza delle variabili permette di posporre i segni sommatorj

$$\int \left(\frac{dz}{dy}\right) dm = \frac{1}{2\sqrt{y}} \int \frac{\cos.\varphi . d\varphi F(m + \sqrt{y} . \cos.\varphi)}{\pi}$$

Ma nel caso di $y = 1$, abbiamo

$$A_1 = 2^2 \int dm \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Quindi sarà

$$A_1 = 2 \int \frac{\cos.\varphi . d\varphi F(m + \cos.\varphi)}{\pi}$$

Differenziando adesso rapporto ad y il valore di $\int\left(\frac{dz}{dy}\right)dm$, avremo

$$\int \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) dm = \frac{1}{4\pi y} \left\{ \int \overline{\cos.\varphi}^2 . d\varphi F'(m + \sqrt{y} . \cos\varphi) - \frac{1}{\sqrt{y}} \int \cos.\varphi . d\varphi F(m + \sqrt{y} . \cos.\varphi) \right\}$$

ma tra i limiti $\varphi=o$, $\varphi=\pi$, si sia

$$\int cos.\varphi.d\varphi F(m+\sqrt{y}.cos.\varphi)=\sqrt{y}\int sen.\varphi^2.d\varphi F'(m+\sqrt{y}.cos.\varphi)$$

onde sostituendo, si avrà

$$\int\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dm=\frac{1}{4\pi y}\int\left\{cos.\varphi^2-sen.\varphi^2\right\}d\varphi.F'(m+\sqrt{y}.cos.\varphi)$$

$$=\frac{1}{4\pi y}\int cos.2\varphi.d\varphi.F'(m+\sqrt{y}.cos.\varphi)$$

ed integrando rapporto ad m

$$\int^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dm^2=\frac{1}{4\pi y}\int cos.2\varphi.d\varphi.F(m+\sqrt{y}.cos.\varphi)$$

ma, facendo $y=1$ dopo le differenziazioni, si ha

$$A_2=2^3\int^2 dm^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

Quindi sarà

$$A_2=2\int\frac{cos.2\varphi.F(m+cos.\varphi)}{\pi}$$

Avremo nella stessa maniera differenziando rapporto ad y il valore ottenuto di $\int^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dm^2$

$$\int^2\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)dm^2=\frac{1}{4\pi y}\left\{\int\frac{1}{2.\sqrt{y}}cos.\varphi.cos.2\varphi.d\varphi F'(m+\sqrt{y}.cos.\varphi)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{y}\int cos.2\varphi F(m+\sqrt{y}.cos.\varphi)\right\}$$

ma abbiamo tra i limiti $\varphi=o$, $\varphi=\pi$

$$\int cos. 2\varphi . d\varphi F(m + \sqrt{y} . cos. \varphi)$$

$$= \frac{\sqrt{y}}{2} \int sen. \varphi . sen. 2\varphi . d\varphi F'(m + \sqrt{y} . cos. \varphi)$$

Quindi sostituendo

$$\int^2 \left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) d m^2 = \frac{1}{8 \pi y^{\frac{3}{2}}} \int (cos. \varphi . cos. 2\varphi$$

$$- sen. \varphi \, sen. 2\varphi) d\varphi . F'(m + \sqrt{y} . cos. \varphi)$$

ossia

$$\int^2 \left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) d m^2 = \frac{1}{8 \pi y^{\frac{3}{2}}} \int cos. 3\varphi . d\varphi F'(m + \sqrt{y} . cos. \varphi)$$

ed integrando rapporto ad m

$$\int^3 \left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) d m^3 = \frac{1}{8 \pi y^{\frac{3}{2}}} \int cos. 3\varphi . d\varphi . F(m + \sqrt{y} . cos. \varphi)$$

nel caso di $y = 1$, si ha

$$A_3 = 2^4 \int^3 \left(\frac{d^3 z}{d y^3}\right) d m^3$$

onde ancora

$$A_3 = 2 \int \frac{cos. 3\varphi . d\varphi . F(m + cos. \varphi)}{\pi}$$

così seguitando, dedurremo generalmente

$$A_x = 2 \int \frac{cos. x\varphi . d\varphi . F(m + cos. \varphi)}{\pi}$$

prendendo l'integrale da $\varphi = o$ fino a $\varphi = \pi$

XXVIII.

Questo resultato è generale, e per convincersene maggiormente, supponghiamo che siasi ottenuto

$$\int^b \left(\frac{d^b z}{d y^b}\right) d m^b = \frac{1}{2^b . \pi y^{\frac{b}{2}}} \int cos.h\varphi . F(m + \sqrt{y} . cos.\varphi)$$

Avremo differenziando rapporto ad y

$$\int^b \left(\frac{d^{b+1} z}{d y^{b+1}}\right) d m^b = \frac{1}{2^{b+1} \pi y^{\frac{b}{2}}} + 1 \left\{ \int cos.h\varphi . cos.\varphi . F'(m + \sqrt{y} . cos.\varphi) d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{x}{\sqrt{y}} \int cos.h\varphi . d\varphi \, F(+ \sqrt{y} . cos.\varphi) \right\}$$

Ma tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$, abbiamo

$$\int cos.h\varphi . d\varphi . F(m + \sqrt{y} . cos.\varphi)$$

$$= \frac{\sqrt{y}}{h} \int sen\,\varphi . sen.h\varphi . F'(m + \sqrt{y} cos.\varphi) d\varphi$$

onde sostituendo

$$\int^b \left(\frac{d^{b+1} z}{d y^{b+1}}\right) d m^b = \frac{1}{2^{b+1} \pi y^{\frac{b}{2}}} \left\{ \int (cos.\varphi . cos.h\varphi \right.$$

$$\left. - sen.\varphi . sen.h\varphi) d\varphi . F'(m + \sqrt{y} . cos.\varphi) \right\}$$

$$= \int \frac{cos.(h+1)\varphi . d\varphi . F'(m + \sqrt{y} . cos.\varphi)}{2^{b+1} . \pi . y^{\frac{b}{2}}}$$

ed integrando rapporto ad m

$$\int^{b+1}\left(\frac{d^{b+1}z}{dy^{b+1}}\right)dm^{b+1}=\int\frac{\cos.(h+1)\varphi.d\varphi\,\mathrm{F}(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)}{2^{b+1}.\pi.y^{\frac{b}{2}}}$$

Pertanto questa formula verificandosi di ordine in ordine, rimane completamente dimostrata.

XXIX.

La formula $\mathrm{A}_x=2\int\frac{\cos.x\varphi\ \mathrm{F}(m+\cos.\varphi)d\varphi}{\pi}$ potrebbe anche ricavarsi da una semplicissima considerazione.

Abbiamo infatti

$$\mathrm{F}(m+\cos.\varphi)=\mathrm{A}+\mathrm{A}_1\cos.\varphi+\mathrm{A}_2\cos.2\varphi+\mathrm{A}_3\cos.3\varphi+\ldots$$
$$+\mathrm{A}_x\cos.x\varphi+\ldots$$

Moltiplicando per $\cos.x\varphi$, ed integrando tra i limiti $\varphi=o$, $\varphi=\pi$, si otterrà la quantità $\int\cos.x\varphi.\mathrm{F}(m+\cos.\varphi)d\varphi$ espressa per una serie di termini della forma

$$\mathrm{A}_b\int\cos.x\varphi.\cos.h\varphi.d\varphi$$

ma si ha

$$\cos.x\varphi.\cos.h\varphi=\frac{\cos.(x+h)\varphi+\cos.(x-h)\varphi}{\pi}$$

Quindi questo termine generale farà

$$\mathrm{A}_b\left\{\frac{sen.(x+h)\varphi}{x+h}+\frac{sen.(x-h)\varphi}{x-h}\right\}$$

Se adesso prenderemo questa quantità nei limiti convenuti, i termini tra le parentesi saranno sempre $=o$, meno nel termine della serie ove $x=h$. Per questo caso infatti esiste il termine

$$\frac{sen.(x-h)\varphi}{x-h}$$

il quale sebbene sia $\frac{0}{0}$ allorchè $x=h$, pure ha un valore determinato, che trovasi con il conosciuto metodo essere $=\varphi$; quindi nel caso nostro diverrà il solo termine che nella serie non si annulla

$$\frac{\pi}{2} A_h$$

Sarà dunque

$$\int \cos. h\varphi . F(m+\cos.\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{2} A_h$$

ossia

$$A_h = 2\int \frac{\cos. h\varphi\, F(m+\cos.\varphi)d\varphi}{\pi}$$

XXX.

Nel cercare le evoluzioni delle formule $\log.(m+\cos.\varphi)d\varphi$ $\frac{1}{m+\cos.\varphi}$, &c. siamo sul principio di queste ricerche pervenuti ad assegnare per i termini generali dei respettivi sviluppi altrettante Equazioni differenziali da cui dipendono. Per tanto a queste Equazioni dovranno sodisfare questi termini generali sotto la forma quì sopra assegnata, ossia sotto la forma d'integrale definito.

Per vederne qualche esempio, consideriamo la Equazione

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2} + \frac{m}{m^2-1}\frac{dA_x}{dm} - \frac{x^2}{m^2-1}A_x = 0$$

che rappresenta il termine generale A_x dello sviluppo di $\log.(m+\cos.\varphi)$. A quella Equazione dovrà per tanto sodisfare

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int \cos x\varphi . d\varphi \log.(m+\cos\varphi)$$

Abbiamo infatti, integrando per parti

$$\pi\frac{A_x}{2}=\frac{1}{x}\cdot sen.\,x\varphi\, log.(m+cos.\varphi)+\frac{1}{x}\int\frac{sen.\varphi\, sen.\,x\varphi}{m+cos.\varphi}\cdot d\varphi$$

quantità, che dovendo esser presa tra i limiti $\varphi=0, \varphi=\pi$ si riduce manifestamente alla più semplice forma

$$\pi\cdot\frac{A_x}{2}=\frac{1}{x}\int\frac{sen.\varphi\,.\,sen.\,x\varphi}{m+cos.\varphi}\cdot d\varphi$$

e nuovamente integrando per parti, si avrà

$$\pi\frac{A_x}{2}=\frac{1}{x^2}\int cos.\,x\varphi\cdot\frac{m\,cos.\varphi+1}{(m+cos.\varphi)^2}\cdot d\varphi$$

ossia

$$A_x=\frac{2}{\pi\,.\,x^2}\int cos.\,x\varphi\,\frac{m\,cos.\varphi+1}{(m+cos\,\varphi)^2}d\varphi$$

Parimente avremo

$$\frac{dA_x}{dm}=\frac{2}{\pi}\int\frac{d\varphi\,.\,cos.\,x\varphi}{m+cos.\varphi}=\frac{2}{\pi}\int\frac{d\varphi\,.\,cos.\,x\varphi\,(m+cos.\varphi)}{(m+cos.\varphi)^2}$$

$$\frac{d^2A_x}{dm^2}=-\int\frac{d\varphi\,.\,cos.\,x\varphi}{(m+cos.\varphi)^2}$$

E sostituendo nella proposta questi valori, si perverrà ad un resultato identico.

Abbiamo di sopra trovato (XXIII) che tra i coefficienti dei coseni degli archi moltiplici ha generalmente luogo la Equazione

$$2(x+1)x+2A_{x+1}=\frac{dA_x}{dm}-\frac{dA_{x+2}}{dm}$$

Pertanto a questa Equazione dovrà sodisfare

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int cos.\,x\varphi\,.\,d\varphi\,.\,F(m+cos.\varphi)$$

Abbiamo infatti

$$A_{x+1} = \frac{2}{\pi} \int \cos.(x+1)\varphi . d\varphi . F(m+\cos.\varphi)$$

cioè integrando per parti

$$A_{x+1} = \frac{2}{\pi} . \frac{sen.(x+1)\varphi}{x+1} . F(m+\cos.\varphi)$$

$$+ \frac{2}{\pi} . \frac{1}{x+1} \int sen.(x+1)\varphi . sen.\varphi . F'(m+\cos.\varphi)\, d\varphi$$

che per le condizioni si riduce

$$A_{x+1} = \frac{2}{\pi} . \frac{1}{x+1} \int sen.(x+1).\varphi . sen.\varphi . d\varphi . F'(m+\cos.\varphi)$$

Si ha inoltre

$$\frac{1}{2} \frac{dA_x}{dm} = \int \cos. x\varphi . F'(m+\cos.\varphi).d\varphi .$$

$$\frac{1}{2} \frac{dA_{x+2}}{dm} = \int \cos.(x+2)\varphi . F'(m+\cos.\varphi).d\varphi .$$

Quindi sostituendo questi valori nella proposta Equazione, avremo

$$\int F'(m+\cos.\varphi).d\varphi \left\{ 2 . sen.(x+1)\varphi . sen.\varphi - \cos. x\varphi + \cos.(x+2).\varphi \right\} = 0$$

resultato identico, poichè si ha

$$sen.(x+1)\varphi . sen.\varphi = \frac{\cos. x\varphi - \cos.(x+2)\varphi}{2}$$

Potrebbesi ancora rappresentar l' Integrale di questa Equazione, e di tutte quelle che svolgendo le funzioni $log.(m+\cos.\varphi)$, $\frac{1}{m+\cos.\varphi}$, &c. abbiamo ottenuto, prevalendoci della formula

$$A_x = \frac{2^{x+1}}{\pi} \left\{ \frac{d^x \int^x dm^x \int F(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)d\varphi}{dy^x} \right\}$$

ove l' Integrale $\int F(m+\sqrt{y}\cos.\varphi)\,d\varphi$ deve esser preso tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, e dove, eseguite le differenziazioni rapporto ad y deve supporsi $y=1$. Abbiamo infatti trovato (XXVI) questa espressione per il termine generale A_x della serie

$$F(m+\cos.\varphi)=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+\ldots\ldots+A_x\cos.x\varphi+\ldots\ldots$$

Ed abbiamo successivamente (XXVII) dimostrata l' identità della formula

$$\frac{2^{x+1}}{\pi}\left\{\frac{d^x\int^x dm^x\int F(m+\sqrt{y}.\cos.\varphi)\,d\varphi}{dy^x}\right\}$$

con l' altra

$$\frac{2}{\pi}\int\cos.x\varphi\,.\,d\varphi\,.\,F(m+\cos.\varphi)$$

prendendo l' integrale da $\varphi=0$ sino a $\varphi=\pi$.

XXXI.

Abbiamo pertanto dimostrato che data la formula $F(m+\cos.\varphi)$ da svolgersi per i coseni degli archi moltiplici di φ in modo che si abbia

$$F(m+\cos.\varphi)=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+\ldots.+A_x\cos.x\varphi+\ldots.$$

il termine generale A_x è rappresentato dalla Equazione

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int\cos.x\varphi.d\varphi\,F(m+\cos.\varphi)$$

integrando tra i convenuti limiti. Questo medesimo resultato si otterrà quando più generalmente prenderemo una funzione della forma $F(m,\varphi)$ da svolgersi in una serie analoga. Egli è facile infatti il convincersi che il ragionamento impiegato (XXIX) per assegnare il termine generale dello sviluppo della funzione $F(m+\cos.\varphi)$ è affatto

indipendente dalla indole di questa funzione stessa, e si applica a qualunque formula dipendente da φ. Se dunque faremo

$$F(m,\varphi) = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots$$

Sarà il termine generale A_x assegnato dalla formula

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int d\varphi.\cos.x\varphi.F(m,\varphi)$$

integrando tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$.

Prima per altro di applicar questo metodo a qualsivoglia funzione è necessario assicurarsi della possibilità di ridurla in una serie della forma assegnata; poichè, omettendo questa precauzione, si troverebbero spesso, per i coefficienti dei coseni degli archi multipli, valori infiniti, o imaginarj, appunto come accade nei casi in cui la serie di Taylor è in difetto.

XXXII.

Per dare un semplicissimo esempio di questo metodo, proponghiamoci di svolgere l'arco φ in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici. Sarà $F(m,\varphi)=\varphi$, e quindi il termine generale A_x sarà determinato dalla Equazione

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int \varphi.d\varphi.\cos.x\varphi$$

integrando tra i limiti stabiliti. Ora si ha

$$\int \varphi\, d\varphi.\cos.x\varphi = \frac{\text{sen}.x\varphi}{x} - \frac{1}{x}\int d\varphi.\text{sen}.x\varphi$$

che per le condizioni si riduce ad

$$\int \varphi \,.\, d\varphi \,.\, \cos.\, x\,\varphi = -\frac{1}{x}\int d\varphi\, \mathrm{sen.}\, x\,\varphi = \frac{1}{x^2}(\cos.\, x\,\pi - 1)$$

sarà pertanto

$$A_x = \frac{2}{\pi \,.\, x^2}(\cos.\, x\,\pi - 1)$$

Quindi apparisce che nei casi in cui sia x pari sarà sempre $A_x = 0$; e se sarà x dispari $= 2\,n + 1$, avremo

$$A_{2n+1} = \frac{-2^2}{\pi(2\,n+1)^2}$$

Sostituendo questi valori nella serie

$$\varphi = A + A_1 \cos.\,\varphi + A_2 \cos.\, 2\,\varphi + \ldots\ldots$$

otterremo immediatamente, osservando che $A = \int \frac{\varphi\, d\varphi}{\pi} = \frac{\pi}{2}$,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{2^2}{\pi}\left(\cos.\varphi + \frac{1}{9}\cos.\, 3\,\varphi + \frac{1}{25}\cos.\, 5\,\varphi + \frac{1}{49}\cos.\, 7\,\varphi + \ldots\ldots\right)$$

serie sommamente osservabile, e convergentissima, poichè qualunque sia φ, si ha sempre $\cos.\, h\,\varphi < 1$.

Facendovi $\varphi = 0$, otterremo

$$\frac{\pi^2}{2^3} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots\ldots$$

resultato che abbiamo per altra strada ottenuto (XVI), e che Euler il primo riconobbe, deducendolo per induzione dalla decomposizione della formula $e^u - e^{-u}$ nei suoi infiniti fattori.

Se in luogo della prima potenza dell'arco φ, si volesse la evoluzione di una qualunque potestà m dell'arco stesso, in modo che fosse

$$\varphi^m = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots\ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots\ldots;$$

si otterrebbe il termine generale A_x dalla Equazione

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \varphi^m \, d\varphi \, . \cos.\, x\varphi$$

purchè le integrazioni si eseguiscano tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Abbiamo integrando per parti

$$\int \varphi^m d\varphi \cos.x\varphi = \frac{\varphi^m \operatorname{sen}.x\varphi}{x} + \frac{m}{x^2}\varphi^{m-1}.\cos.\,x\varphi - \frac{m(m-1)}{x^2}\int \varphi^{m-2}.d\varphi \cos\, x\varphi$$

dalla qual formula mediante le successive sostituzioni, troveremo nel caso di m pari

$$\int \varphi^m d\varphi.\cos.x\varphi = \operatorname{sen}.x\varphi\left(\frac{\varphi^m}{x} - \frac{m(m-1)}{x^3}\varphi^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{x^5}\varphi^{m-4} - \&c.\right)$$

$$+ \cos.\,x\varphi\left(\frac{m}{x^2}\varphi^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{x^4}\varphi^{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{x^6}\varphi^{m-5} - \&c.\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots 3.2}{x^m}.\varphi\right)$$

ove il segno superiore conviene nel caso di $\frac{m}{2}$ dispari, e l'inferiore dovrà preferirsi se $\frac{m}{2}$ è pari. Prendendo ora questo integrale indefinito tra i limiti determinati $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, avremo moltiplicando per $\frac{2}{\pi}$

$$\frac{2}{\pi}\int \varphi^m d\varphi.\cos.x\varphi = \pm 2\left\{\frac{m\pi^{m-2}}{x^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{x^4}\pi^{m-4}\right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{x^6}\pi^{m-6} - \&c.\ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.3.2}{x^m}\right\}$$

dove nel duplice segno premesso alla parentesi dovrà scegliersi il positivo se x è pari, ed il negativo se x è impari. Questa espressione rappresenterà il valore del termine generale A_x nella serie

$$\varphi^m = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots\ldots + A_x \cos. x\varphi + \ldots\ldots$$

ed essendo $A = \int \frac{\varphi^m d\varphi}{\pi}$ tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, sarà

$$A = \frac{1}{m+1} \cdot \pi^m$$

Pertanto sostituendo questi valori nella nostra serie, avremo

$$\varphi^m = \frac{1}{m+1} \cdot \pi^m - 2 \Big\{ m\pi^{m-2} - m(m-1)(m-2)\pi^{m-4}$$

$$+ m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\pi^{m-6} - \&c. \Big\} \cos.\varphi$$

$$+ 2 \Big\{ \frac{m\pi^{m-2}}{2^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2^4}\pi^{m-4}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\pi^{m-6}}{2^6} - \&c. \Big\} \cos. 2\varphi$$

$$- 2 \Big\{ \frac{m\pi^{m-2}}{3^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3^4}\pi^{m-4}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\pi^{m-6}}{3^6} - \&c. \Big\} \cos. 3\varphi$$

$$\vdots$$

$$\pm 2 \Big\{ \frac{m\pi^{m-2}}{x^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{x^4}\pi^{m-4}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{x^6}\pi^{m-6} - \&c. \Big\} \cos. x\varphi$$

$$\mp \&c.$$

Se in questa Equazione si farà $\varphi = 0$, e si ordinerà il resultato per le potenze di π, il che molto semplicemente potremo eseguire, essendo le simili potestà di π tutte verticalmente disposte, e con lo stesso coefficiente in m, si avrà

$$0 = \frac{\pi^m}{m+1} - 2\, m\, \pi^{m-2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \&c. \right\}$$

$$+ 2\, m\, (m-1)\, (m-2)\, .\, \pi^{m-4} \left\{ 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \&c. \right\} \ldots\ldots\ldots (B)$$

$$-2\, m\, (m-1)(m-2)(m-3)\, (m-4)\, \pi^{m-6} \left\{ 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \&c. \right\}$$

$$+ \&c.$$

Equazione che a priori dimostra le formule per induzione ottenute da Euler per la somma generale della serie infinita

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \&c. \ldots\ldots\ldots (C)$$

Se nella Equazione (B) si facesse $m = 2$, avrebbesi

$$\frac{\pi^2}{3 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \;\&c.$$

Risostituendovi questo valore, e facendo quindi successivamente $m = 4$, 6, &c. si otterrà la somma della serie (C).

Questi resultati appartengono al caso di m pari: se ne otterrebbero dei simili se si fosse supposta m dispari; non ci tratterremo a svilupparli, poichè non presentano nessuna difficoltà.

XXXIII.

La general funzione $F.\varphi$, che abbiamo veduto (XXXI) potersi ridurre in serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici, facilmente potrà ancora svolgersi in una serie che proceda per i seni degli archi stessi. Ed in infatti se col segno $\Sigma A_h . sen. h\varphi$ denoteremo la quantità

$$A_1 sen. \varphi + A_2 sen. 2\varphi + A_3 sen 3\varphi + \ldots\ldots$$

noi avremo

$$F.\varphi = A + \Sigma A_h sen. h\varphi$$

ove il primo termine A sarà sempre conosciuto, ed eguale a $F.\varphi$ ove sia stato fatto $\varphi = 0$. Moltiplicando quella Equazione per $sen. x\varphi . d\varphi$, ed integrando, si avrà

$$\int sen. x\varphi \cdot d\varphi . F. \varphi = -\frac{1}{x} A . cos. x\varphi + \Sigma . A_h . \int sen. h\varphi . sen. x\varphi . d\varphi .$$

Se ora prenderemo questi integrali tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, è facile il vedere che in queste supposizioni sarà sempre

$$\int sen. h\varphi . sen. x\varphi . d\varphi = 0$$

meno nel caso in cui sia $h = x$. Si ha in questa circostanza

$$\int (sen. x\varphi)^2 . d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

e quindi la quantità $\Sigma . A_h \int sen. x\varphi\, sen. h\varphi\, d\varphi$ si ridurrà al termine unico $\frac{\pi}{2} A_x$.

Per tanto apparisce che la Equazione

$$\int F.\varphi . sen. x\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{x} A . cos. x\varphi + \Sigma A_h . \int sen\ h . sen. x\varphi . d\varphi$$

si trasformerà nell'altra

$$\int sen.\, x\,\varphi \,.\, d\,\varphi \,.\, \mathrm{F}\,.\,\varphi = \frac{\mathrm{A}}{x}\left(1 - cos.\, x\,\pi\right) + \frac{\pi}{2}\,.\,\mathrm{A}_x$$

Quindi nel caso di x pari

$$\mathrm{A}_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\, x\,\varphi \,.\, d\varphi \,.\, \mathrm{F}\,.\,\varphi$$

e nel caso di x dispari

$$\mathrm{A}_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\, x\,\varphi \,.\, d\,\varphi \,.\, \mathrm{F}\,.\,\varphi - 4\,\frac{\mathrm{A}}{\pi\, x}$$

XXXIV.

Riprendiamo l'esempio superiore, e vogliasi l'arco φ svolto in serie per i seni degli archi moltiplici. Facendo

$$\varphi = \mathrm{A} + \mathrm{A}_1\, sen.\, \varphi + \mathrm{A}_2\, sen.\, 2\,\varphi + \ldots\ldots + \mathrm{A}_x\, sen.\, x\,\varphi + \ldots\ldots$$

sarà in primo luogo $\mathrm{A} = 0$. Avremo inoltre $\mathrm{F}\,.\,\varphi = \varphi$; e quindi

$$\mathrm{A}_x = \frac{2}{\pi} \int .\, sen.\, x\,\varphi \,.\, d\,\varphi \,.\, \mathrm{F}\varphi = \frac{2}{\pi} \int \varphi\, d\,\varphi \,.\, sen.\, x\,\varphi .$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. In queste supposizioni, abbiamo

$$\int \varphi\, d\,\varphi \,.\, sen.\, x\,\varphi = -\frac{\pi}{x}\,.\, cos.\, x\,\pi$$

e pertanto

$$\mathrm{A}_x = -\frac{2}{x}\,.\, cos.\, x\,\pi$$

cioè nel caso di x pari, $\mathrm{A}_x = -\frac{2}{x}$; e nel caso di x dispari, $\mathrm{A}_x = \frac{2}{x}$. Sostituendo questi valori nella serie assegnata, otterremo

$$\frac{\varphi}{2} = sen.\,\varphi - \frac{1}{2}\,sen\;2\,\varphi + \frac{1}{3}\,sen.\,3\,\varphi - \frac{1}{4}\,sen.\;4\;\varphi + \&c.$$

serie conosciuta.

Se faremo $\varphi = \frac{\pi}{2} =$ al quadrante, si avrà

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$$

serie parimente nota, e di cui il primo inventore è Leibnitz. Se si volesse una qualsivoglia potenza dell' arco svolta in una serie di questa forma, opereremo come abbiamo precedentemente fatto (XXXII) allorchè la serie assegnata procedeva per i coseni, e giungeremo ad espressioni egualmente osservabili.

XXXV.

Con questo metodo stesso si potranno mettere in evidenza dei nuovi rapporti che passano tra le differenti funzioni del Circolo, dai quali rapporti vedremo discendere come casi particolari tutte quelle interessanti, e curiose espressioni ottenute per induzione dall' illustre Euler per rappresentare in serie la Periferia circolare, e le relazioni che passano tra questa ed alcune sue determinate funzioni. Ad oggetto di evitare una soverchia complicazione ci limiteremo ad indicare i resultati più generali, e più osservabili che derivano dal metodo usato, poichè la di lui uniformità ci dispensa dalle più particolari ricerche, alle quali ognuno potrà supplire.

XXXVI.

Proponghiamoci primieramente di svolgere il seno dell' arco φ in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici. Ponghiamo quindi come precedentemente

$$sen.\ \varphi = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi + \ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots$$

noi avremo (XXXI)

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\ \varphi \,.\, \cos.\ x\,\varphi \,.\, d\,\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Abbiamo, come è noto,

$$sen.\varphi \,.\, \cos.\ x\ \varphi = \frac{sen.(x+1)\ \varphi - sen.(x-1)\ \varphi}{2}$$

e quindi anche

$$2 \int sen.\ \varphi \cos.\ x\ \varphi\ d\varphi = -\frac{1}{x+1} \,.\, \cos.\ (x+1)\ \varphi + \frac{1}{x-1} \cos.(x-1)\ \varphi$$

e facilmente vedrassi che nelle condizioni stabilite si avrà nel caso di x pari

$$2 \int sen.\ \varphi \,.\, \cos.\ x\ \varphi \,.\, d\,\varphi = \frac{-4}{x^2 - 1}$$

e nel caso di x dispari

$$2 \int sen.\varphi \,.\, \cos.\ x\,\varphi \,.\, d\,\varphi = 0$$

Quindi se x è pari, avremo $A_x = -\frac{4}{\pi(x^2-1)}$, e se x è dispari, sarà $A_x = 0$. Abbiamo inoltre

$$A = \int \frac{sen\ \varphi \,.\, d\varphi}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

e quindi sostituendo si otterrà

$$sen.\varphi = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\cos.2\varphi}{2^2-1} + \frac{\cos.4\varphi}{4^2-1} + \frac{\cos.6\varphi}{6^2-1} \ldots + \frac{\cos.2h\varphi}{4h^2-1} + \ldots \right\}$$

resultato assai singolare. Ne dedurremo

$$\pi = \frac{2}{sen.\varphi} \left\{ 1 - 2 \left(\frac{cos. 2\varphi}{2^2 - 1} + \frac{cos. 4\varphi}{4^2 - 1} + \ldots \right) \right\}$$

dalla qual serie ne deriveranno infinite altre tutte convergenti per calcolare il valore di π, poichè qualsivoglia valore abbia φ, è sempre $cos.h\varphi < 1$. Se faremo $\varphi = 90°$, si ha

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} - \ldots.$$

Facendovi $\varphi = 0$, avremo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \ldots.$$

cioè aggiungendo con la precedente, otterremo

$$\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \frac{1}{10^2 - 1} + \frac{1}{14^2 - 1} + \ldots$$

serie convergentissima.

Se nella serie ottenuta

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \ldots$$

trasporteremo nel primo membro prima un termine del secondo, quindi due, tre, &c., avremo riducendo

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \ldots$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{6^2 - 1} + \frac{1}{8^2 - 1} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2(x - 1)} = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{(x + 2)^2 - 1} + \ldots$$

La quale espressione, offrendo la somma di una nuova serie, porge il modo di sommare un numero qualunque di termini della serie proposta

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \ldots$$

Sottraendola infatti da questa, si avrà

$$\frac{x-2}{2(x-1)} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{(x-2)^2-1}$$

Si può verificare la serie trovata

$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \frac{1}{8^2-1} + \ldots$$

nella seguente maniera. Cerchiamo la somma U della serie

$$U = \frac{x^{2+1}}{2^2-1} - \frac{x^{4+1}}{4^2-1} + \frac{x^{6+1}}{6^2-1} - \frac{x^{8+1}}{8^2-1} + \&c.$$

noi avremo differenziando

$$\frac{dU}{dx} = x^2 - \frac{x^4}{4-1} + \frac{x^6}{6-1} + \frac{x^8}{8-1} + \&c. = x\, arc.tang.x$$

Quindi integrando

$$U = e + \int x\,dx\, arc.\ tang.\ x$$

ove e è una arbitraria. Noi abbiamo

$$\int x\,dx . arc. tang.\ x = \frac{x^2}{2}\ arc. tang.\ x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$$

ed essendo $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, sarà $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = x - arc.\ tang.\ x$;

cioè sostituendo

$$U = e + \frac{1}{2}(x^2 + 1)\, arc.\, tang.\, x - \frac{x}{2}$$

ove la indeterminata e sarà $= o$, poichè U divien tale se $x = o$; onde

$$U = \frac{(x^2 + 1)\, arc.\, tang.\, x - x}{2} = \frac{x^3}{2^2 - 1} - \frac{x^5}{4^2 - 1} + \frac{x^7}{6^2 - 1} - \&c.$$

Facendovi $x = 1$, sarà $arc.\, tang.\, x = 45° = \frac{\pi}{4}$; e quindi

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} - \&c.$$

come sopra.

XXXVII.

Se per una maggior generalità ci proporremo di svolgere in serie per i coseni degli archi moltiplici di φ la funzione sen. $n\varphi$, converrà far distinzione tra il caso di n pari, ed il caso di n dispari. Sarà infatti il termine generale della serie assegnata

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\, n\varphi . cos.\, x\varphi . d\varphi$$

cioè effettuando la integrazione tra i limiti $\varphi = o$, $\varphi = \pi$

$$A_x = \frac{1}{\pi(x+n)}\left\{cos.\, (x+n)\pi - 1\right\} - \frac{1}{\pi(x-n)}\left\{cos.\, (x-n)\pi - 1\right\}$$

Supponghiamo adesso che sia n dispari. E' evidente che in tal caso, se x sarà anch'esso dispari, avremo

$$A_x = o$$

e se x sarà pari

$$A_x = -\frac{4n}{\pi(x^2 - n^2)}$$

Ed avendosi inoltre

$$A = \frac{1}{\pi}\int sen.\, n\varphi . d\varphi = \frac{2}{n\pi}$$

si avrà sostituendo questi valori nella espressione

$$sen.\, n\varphi = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots + A_x \cos. x\varphi + \ldots$$

la seguente osservabile relazione per il caso di n dispari:

$$sen.\, n\varphi = \frac{2}{n\pi} - \frac{4n}{\pi}\left\{\frac{\cos. 2\varphi}{2^2 - n^2} + \frac{\cos. 4\varphi}{4^2 - n^2} + \frac{\cos. 6\varphi}{6^2 - n^2} + \ldots\right\}$$

Facendosi $\varphi = 0$, avrassi

$$\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2^2 - n^2} + \frac{1}{4^2 - n^2} + \frac{1}{6^2 - n^2} + \ldots$$

serie che si converte nella precedente (XXXVI), facendovi $n = 1$.

Se nella espressione ottenuta per $sen.\, n\varphi$ faremo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si avrà

$$\pi . sen.\, \frac{n}{2}\pi = \frac{2}{n} - 4n\left(\frac{1}{2^2 - n^2} - \frac{1}{4^2 - n^2} + \frac{1}{6^2 - n^2} - \&c.\right)$$

ma si ha $sen.\, \frac{n}{2}\pi = \pm 1$, ove il segno superiore ha luogo quando, essendo per supposizione n dispari, cioè della forma $2h + 1$, sarà h un numero pari, ed il segno inferiore deve scegliersi se h è dispari. Con questa osservazione, sarà

$$\pm \pi = \frac{2}{n} - 4n\left\{\frac{1}{2^2 - n^2} - \frac{1}{4^2 - n^2} + \frac{1}{6^2 - n^2} - \&c.\right\}$$

Le cose precedenti appartengono al caso di n dispari. Vediamo adesso il caso di n pari. A tale oggetto riprendiamo il general valore di A_x, che abbiamo veduto essere.

$$A_x = -\frac{1}{\pi(x+n)}\left\{\cos.(x+n)\pi - 1\right\} + \frac{1}{\pi(x-n)}\left\{\cos.(x-n)\pi - 1\right\}$$

Egli è chiaro che essendo n pari, tutte le volte che sarà tale ancora la x, avremo

$$A_x = o$$

e nel caso di x dispari, sarà

$$A_x = -\frac{4}{\pi(x^2 - n^2)}$$

Sarà inoltre il primo termine A determinato dalla Equazione

$$A = \frac{1}{\pi}\int sen.\, n\,\varphi . d\,\varphi$$

che nel caso di n pari è $= o$. Sostituendo questi valori nella serie

$$sen.\, n\varphi = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + A_3 \cos. 3\varphi + \ldots .$$

si avrà immediatamente

$$sen.\, n\varphi = -\frac{4n}{\pi}\left\{\frac{\cos.\varphi}{1-n^2} + \frac{\cos. 3\varphi}{3^2 - n^2} + \frac{\cos. 5\varphi}{5^2 - n^2} + \&c.\right\}$$

Se da questa formula generale si volesse passare a quella in cui $n = o$, si avrebbe primieramente

$$\frac{sen.\, n\varphi}{n} = -\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos\varphi}{1-n^2} + \frac{\cos. 3\varphi}{3^2 - n^2} + \frac{\cos. 5\varphi}{5^2 - n^2} + \&c.\right\}$$

nel caso di $n = o$, si troverà col conosciuto metodo che la frazione $\frac{sen.\, n\varphi}{n}$ diviene $= \varphi$; quindi si otterrebbe

$$\varphi = -\frac{4}{\pi}\left\{\cos.\varphi + \frac{\cos.3\varphi}{3^2} + \frac{\cos.5\varphi}{5^2} + \&c.\right\}$$

Resultato differente da quello precedentemente ottenuto (XXXII) La causa di una tal diversità si riscontra nel primo termine A, il di cui valore abbiamo veduto essere

$$A = \int \frac{sen.n\varphi.d\varphi}{\pi} = -\frac{1}{n}\left(\frac{\cos.n\pi - 1}{\pi}\right)$$

Quantità che non è $= o$ allorchè $n = o$; ed il di lei numeratore annullandosi contemporaneamente al denominatore, ne troveremo il valore differenziando questo, e quello rapporto ad n, e facendo in seguito $n = 0$; ed otterremo

$$A = \frac{\pi}{2}$$

Converrà in conseguenza aggiungere al valore di φ questo primo termine omesso inopportunamente; ed avremo come già sapevamo

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos.\varphi + \frac{\cos.3\varphi}{3^2} + \frac{\cos.5\varphi}{5^2} + \ldots\right)$$

XXXVIII.

Possiamo quì fare una osservazione assai interessante; ed è, che il metodo usato per ottenere questi sviluppi può aver successo ancora quando nella quantità $sen.n\varphi$ sia n un numero frazionario, irrazionale, o anche trascendente. Se in fatti comunque sia n supporremo

$$sen.\,n\varphi = A + A_1\cos.\varphi + A_2\cos.2\varphi + \ldots\ldots + A_x\cos.x\varphi + \ldots\ldots$$

sarà sempre il termine generale A_x determinato dalla formula

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int sen.\,n\varphi\,.\cos.\,x\varphi\,.d\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Effettuata questa integrazione, facilmente si troverà

$$A_x = -\frac{1}{\pi(n+x)} \left\{ \cos.(n+x)\pi - 1 \right\} - \frac{1}{\pi(n-x)} \left\{ \cos.(n-x)\pi - 1 \right\}$$

ora si ha

$$\cos.(n+x)\pi = \cos. x\pi . \cos. n\pi$$

$$\cos.(n-x)\pi = \cos. x\pi . \cos. n\pi$$

Quindi sostituendo, avremo

$$A_x = -\left\{ \cos. x\pi . \cos. n\pi - 1 \right\} \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n-x} \right) . \frac{1}{\pi}$$

cioè nel caso di x pari

$$A_x = \frac{2n}{\pi} \left(\cos. n\pi - 1 \right) . \frac{1}{x^2 - n^2}$$

e nel caso di x dispari

$$A_x = -\frac{2n}{\pi} \left(\cos. n\pi + 1 \right) . \frac{1}{x^2 - n^2}$$

Inoltre il primo termine A è assegnato dalla Equaziono

$$A = \frac{1}{\pi} \int sen. n\varphi . d\varphi$$

cioè, effettuata la integrazione tra i soliti limiti,

$$A = -\frac{1}{n\pi} \left(\cos. n\pi - 1 \right)$$

Sostituendo questi valori nella nostra serie, avremo

$$sen. n\varphi = -\frac{1}{n\pi}(\cos. n\pi - 1) + \frac{2n}{\pi}(\cos. n\pi - 1)\left(\frac{\cos. 2\varphi}{2^2 - n^2} + \frac{\cos. 4\varphi}{4^2 - n^2} + \frac{\cos. 6\varphi}{6^2 - n^2} + \&c. \right)$$

$$- \frac{2n}{\pi}(\cos. n\pi + 1)\left(\frac{\cos. \varphi}{1 - n^2} + \frac{\cos. 3\varphi}{3^2 - n^2} + \frac{\cos. 5\varphi}{5^2 - n^2} + \&c. \right)$$

espressione generale, dalla quale come casi particolari tutte le precedenti derivano, come è facilissimo il verificare.

XXXIX.

Non solamente nella supposizione di n qualunque la funzione $sen.\, n\,\varphi$ è suscettibile di essere espressa in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici; ma può ancora svilupparsi in una serie ordinata per i seni. Con l' esame di questo esempio, termineremo questa discussione della funzione $sen.\, n\,\varphi$. Facciamo pertanto

$$sen.\, n\varphi = A + A_1\, sen.\varphi + A_2\, sen.\, 2\,\varphi + A_3\, sen.\, 3\,\varphi + \ldots + A_x sen.\, x\,\varphi + \ldots$$

Facendo $\varphi = 0$, troveremo $A = 0$; e dovremo determinare il termine generale A_x (XXXIII) dalla Equazione

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\, n\varphi\,.\, sen.\, x\varphi\,.\, d\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; poichè in questo caso mancando il primo termine A, vien tolta la differenza che passa tra le due formule

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\, x\varphi\,.\, d\varphi\,.\, F\,.\,\varphi$$

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int sen.\, x\,\varphi\,.\, d\varphi\,.\, F\,.\,\varphi - \frac{4}{\pi\,.\,x} A$$

la prima delle quali appartiene generalmente al caso di x pari, e la seconda al caso di x dispari.

Facilmente si troverà nelle condizioni stabilite

$$\int sen.\, n\varphi\,.\, sen\; x\varphi\,.\, d\varphi = \pm \frac{x\,.\, sen.\, n\,\pi}{n^2 - x^2}$$

avvertendo di scegliere il segno superiore se x è pari, e di preferir l'inferiore se x è dispari. Per tanto con questa distinzione sarà

$$A_x = \pm 2 \frac{x \; sen. \; n \pi}{\pi (n^2 - x^2)}$$

Quindi sostituendo nella nostra serie, avremo

$$sen. n \varphi = -\frac{2}{\pi} sen. n \pi \left(\frac{sen. \varphi}{n^2 - 1} - \frac{2. sen. 2\varphi}{n^2 - 2^2} + \frac{3. sen. 3\varphi}{n^2 - 3^2} \quad \frac{4 \; sen. 4\varphi}{n^2 - 4^2} + \&c. \right)$$

ove n potendo esser qualunque, ne dedurremo il modo di calcolare il seno del prodotto di due archi qualunque n, e φ.

X L.

Abbiamo negli articoli precedenti assegnate varie espressioni della funzione *sen.* $n\varphi$. Attualmente prendiamo a considerare il coseno dell'arco φ, e vediamo di svolgerlo in una serie che proceda per i seni degli archi moltiplici di φ, in modo che sia

$$cos. \varphi = A + A_1 \, sen. \varphi + A_2 \, sen. 2\varphi + A_3 \, sen. 3\varphi + \ldots\ldots$$

Ponendo $\varphi = 0$, otterremo $A = 1$; Avremo inoltre, se x è pari (XXXIII)

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int cos. \varphi \, . \, sen. \, x \, \varphi \, . \, d \, \varphi$$

e se x è dispari

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int cos. \varphi \; sen. \, x \, \varphi \, . \, d \, \varphi - \frac{4}{\pi x}$$

Ma nel primo caso abbiamo, integrando nei limiti convenuti

$$\int cos. \varphi \, . \, sen. \, x \, \varphi \, . \, d \, \varphi = \frac{2 x}{\varphi^2 - 1}$$

e nel secondo

$$\int cos. \varphi \, . \, sen. \, x \varphi \, . \, d \varphi = 0$$

sarà dunque nel caso di x pari, $A_x = \frac{4x}{\pi(x^2-1)}$, e nel caso di x dispari, $A_x = -\frac{4}{\pi x}$.

Sostituendo questi valori nella serie assegnata, otterremo la seguente osservabile espressione di $\cos.\varphi$

$$\cos.\varphi = 1 - \frac{4}{\pi}\left\{ \text{sen.}\,\varphi - \frac{2}{2^2-1}\text{sen.}\,2\varphi + \frac{\text{sen.}\,3\varphi}{3} - \frac{4}{4^2-1}\text{sen.}\,4\varphi + \frac{\text{sen.}\,5\varphi}{5} - \&c. \right\}$$

Differenziando questa espressione rapporto a φ, si avrà

$$\text{sen.}\,\varphi = \frac{4}{\pi}\left\{ \cos.\varphi - \frac{2^2}{2^2-1}\cos.2\varphi + \cos.3\varphi - \frac{4^2}{4^2-1}\cos.4\varphi + \cos.5\varphi - \&c. \right\}$$

e facendovi $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$, avremo per calcolar la mezza Periferia circolare la serie

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2^2}{2^2-1} - \frac{4^2}{4^2-1} + \frac{6^2}{6^2-1} - \frac{8^2}{8^2-1} + \&c. \ldots \pm \frac{4x^2}{4x^2-1} \mp \&c.$$

dove x essendo della forma $2h+2$, prenderemo il segno superiore se h è pari, e l'inferiore se è dispari. Per altro questa serie non differisce da quella ottenuta (XXXVI); ed infatti può mettersi sotto la forma

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \&c.$$
$$+ \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \frac{1}{8^2-1} + \ldots$$

Ed avendosi

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$$

sarà sostituendo, come precedentemente (XXXVI)

$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \&c.$$

XLI.

Per la formula più generale *cos. n φ*, avremo per il termine generale della serie ordinata per i seni degli archi moltiplici

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \cos. n\,\varphi . \operatorname{sen}. x\,\varphi . d\,\varphi$$

per il caso di x pari; e nella supposizione di x dispari,

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \cos. n\,\varphi . \operatorname{sen}. x\,\varphi . d\,\varphi - \frac{4}{\pi x}$$

Essendo n un numero intero comunque, converrà distinguere il caso in cui è pari, da quello in cui è dispari. Abbiamo pertanto integrando tra i limiti $\varphi = o, \varphi = \pi$,

$$\int \cos. n\,\varphi . \operatorname{sen}. x\,\varphi . d\,\varphi = \frac{1}{2(x+n)} \left(1 - \cos.(x+n)\pi\right)$$

$$+ \frac{1}{2(x-n)} \left(1 - \cos.(x-n)\pi\right)$$

Se sarà n pari, avremo nel caso di x pari

$$\int \cos. n\,\varphi . \operatorname{sen}. x\,\varphi . d\,\varphi = o$$

e se la x sarà dispari, sarà

$$\int \cos. n\,\varphi . \operatorname{sen}. x\,\varphi . d\,\varphi = \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Quindi essendo x pari, si avrà $A_x = o$, e se sarà dispari, il valore di A_x sarà dato dalla Equazione

$$A_x = \frac{4x}{\pi(x^2 - n^2)} - \frac{4}{\pi . x}$$

Sostituendo questi valori nella serie

$$\cos. n\,\varphi = A + A_1 \operatorname{sen}. \varphi + A_2 \operatorname{sen}. 2\,\varphi + \ldots + A_x \operatorname{sen}. x\,\varphi + \ldots$$

troveremo la espressione assai elegante

$$\cos. n\varphi = 1 + \frac{4}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{1-n^2} - 1 \right) sen.\,\varphi + \left(\frac{3}{3^2-n^2} - \frac{1}{3} \right) sen.\,3\varphi \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{5^2-n^2} - \frac{1}{5} \right) sen.\,5\varphi + \&c. \right\}$$

Questo resultato ha luogo nel caso di n pari. Per esaminare il caso di n dispari, riprendiamo la formula

$$\int \cos. n\varphi . sen. x\varphi . d\varphi = \frac{1}{2(x+n)} \left\{ 1 - \cos.\,(x+n)\pi \right\}$$

$$\mp \frac{1}{2(x-n)} \left\{ 1 - \cos.(x-n)\pi \right\}$$

Egli è chiaro che se ancora la x sarà dispari, sarà

$$\int \cos. n\varphi . sen. x\varphi . d\varphi = 0$$

e se sarà la x pari, avremo

$$\int \cos. n\varphi . sen. x\varphi . d\varphi = \frac{2x}{x^2-n^2}.$$

Sostituendo questi valori nelle formule

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \cos. n\varphi . sen. x\varphi . d\varphi - \frac{4}{\pi x}$$

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \cos. n\varphi . sen. x\varphi . d\varphi$$

la prima delle quali ha luogo se x è dispari, e la seconda se x è pari, avremo per il primo caso

$$A_x = -\frac{4}{\pi x}$$

e per il secondo

$$A_x = \frac{4x}{\pi(x^2-n^2)}$$

Sostituendo questi valori nella nostra serie, si avrà

$$\cos. n\varphi = 1 - \frac{4}{\pi} \left\{ sen.\,\varphi - \frac{2}{2^2 - n^2}\, sen.\,2\varphi + \frac{1}{3}\, sen.\,3\varphi - \frac{4}{4^2 - n^2}\, sen.\,4\varphi + \frac{1}{5}\, sen.\,5\varphi + \&c. \right\}$$

XLII.

Se poi fosse n un numero fratto, irrazionale, o trascendente, si potrà sempre svolgere per i seni degli archi moltiplici di φ la funzione $\cos.\, n\,\varphi$, in modo che sia

$$\cos.\, n\,\varphi = 1 + A_1\, sen.\,\varphi + A_2\, sen.\,2\,\varphi + \ldots + A_x\, sen.\,x\varphi + \&c.$$

avremo infatti (XXXIII) nel caso di x pari

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \cos.\, n\,\varphi . sen.\,x\varphi . d\varphi$$

e se x è dispari

$$A_x = \frac{2}{\pi} \int \cos.\, n\,\varphi . sen.\,x\,\varphi . d\,\varphi - \frac{4}{\pi . x}$$

Abbiamo adesso

$$\cos.\, n\,\varphi . sen.\,x\,\varphi = \frac{1}{2}\, sen.(x+n).\varphi + \frac{1}{2}\, sen.(x-n).\varphi$$

Quindi moltiplicando per $d\,\varphi$, e prendendo gli integrali da $\varphi = o$ fino a $\varphi = \pi$

$$\int \cos.\, n\,\varphi\, sen.\,x\,\varphi . d\varphi = -(\cos.\, x\pi . \cos.\, n\pi - 1)\, \frac{x}{x^2 - n^2}$$

cioè se x è pari

$$\int \cos.\, n\,\varphi . sen.\,x\varphi . d\varphi = -(\cos.\, n\pi - 1) . \frac{x}{x^2 - n^2}$$

e se x è dispari

$$\int \cos.\, n\,\varphi . sen.\,x\,\varphi . d\varphi = (\cos.\, n\,\pi + 1) . \frac{x}{x^2 - n^2}$$

Sostituendo queste espressioni nei valori di A_x, avremo, essendo x pari

$$A_x = -(\cos. n\pi - 1) \cdot \frac{2x}{\pi(x^2-n^2)}$$

ed essendo x dispari

$$A_x = (\cos. n\pi + 1) \cdot \frac{2x}{\pi(x^2-n^2)} - \frac{4}{\pi x}$$

onde sostituendo nella serie stabilita per $\cos. n\varphi$, si otterrà la formula generalissima

$$\cos. n\varphi = 1 + \frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{\cos. n\pi+1}{1-n^2} - \frac{2}{1}\right)\text{sen.}\,\varphi + \left(\frac{3(\cos. n\pi+1)}{3^2-n^2} - \frac{2}{3}\right)\text{sen.}\,3\varphi\right.$$

$$\left. + \left(\frac{5(\cos. n\pi+1)}{5^2-n^2} - \frac{2}{5}\right)\text{sen.}\,5\varphi + \left(\frac{7(\cos. n\pi+1)}{7^2-n^2} - \frac{2}{7}\right)\text{sen.}\,7\varphi + \&c.\right\}$$

$$- \frac{2}{\pi}(\cos. n\pi - 1)\left(\frac{2\,\text{sen.}\,2\varphi}{2^2-n^2} + \frac{4\,\text{sen}\,4\varphi}{4^2-n^2} + \frac{6\,\text{sen.}\,6\varphi}{6^2-n^2} + \&c.\right)$$

della quale le precedenti sono casi particolari.

XLIII.

Tutte le volte che n sarà fratto, o irrazionale, o trascendente potremo svolgere la funzione $\cos. n\varphi$ anche per i coseni degli archi moltiplici di φ. In questo caso, facendo

$$\cos. n\varphi = A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots\ldots + A^x \cos. x\varphi + \ldots\ldots$$

il valore del termine generale A_x sarà assegnato (XXXI) dalla formula

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int \cos. n\varphi . \cos. x\varphi . d\varphi$$

senza che debba farsi distinzione tra il caso di x pari, o dispari come conviene allorchè le serie procedono per i seni degli archi moltiplici (XXXIII).

Facilmente troveremo, integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$,

$$\int \cos. n\varphi . \cos. x\varphi . d\varphi = \frac{1}{2(n+x)} . \operatorname{sen}. (n+x)\pi + \frac{1}{2(n-x)} \operatorname{sen}. (n-x)\pi$$

Abbiamo adesso

$$\operatorname{sen}. (n+x).\pi = \operatorname{sen}. (n-x)\pi = \pm \operatorname{sen}. n\pi$$

ove il segno superiore conviene ad x pari, e l'inferiore ad x dispari. Sostituendo, troveremo

$$\int \cos. n\varphi . \cos. x\varphi . d\varphi = \pm \frac{n . \operatorname{sen}. n\pi}{n^2 - x^2}$$

e quindi

$$A_x = \pm \frac{2n}{\pi} . \frac{\operatorname{sen}. n\pi}{n^2 - x^2}$$

Si ha inoltre

$$A = \int \cos. n\varphi . d\varphi = \frac{1}{n\pi} . \operatorname{sen}. n\pi .$$

Quindi sostituendo nella nostra serie, si avrà

$$\cos n\varphi = \frac{1}{n\pi} . \operatorname{sen}. n\pi - \frac{2n}{\pi} \operatorname{sen}. n\pi \left\{ \frac{\cos. \varphi}{n^2 - 1} + \frac{\cos. 3\varphi}{n^2 - 3^2} + \frac{\cos. 5\varphi}{n^2 - 5^2} + \&c. \right\}$$

$$+ \frac{2n}{\pi} . \operatorname{sen}. n\pi \left\{ \frac{\cos. 2\varphi}{n^2 - 2^2} + \frac{\cos. 4\varphi}{n^2 - 4^2} + \frac{\cos. 6\varphi}{n^2 - 6^2} + \&c. \right\}$$

ossia più semplicemente

$$\cos. n\varphi = \frac{\operatorname{sen}. n\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{n} - 2n \left(\frac{\cos. \varphi}{n^2 - 1} - \frac{\cos. 2\varphi}{n^2 - 2^2} + \frac{\cos. 3\varphi}{n^2 - 3^2} - \frac{\cos. 4\varphi}{n^2 - 4^2} + \&c. \right) \right\}$$

Facendovi $\varphi = o$, otterremo mediante una agevole riduzione

$$\frac{1}{2n^2}-\frac{\pi}{2n.sen.n\pi}=\frac{1}{n^2-1}-\frac{1}{n^2-2^2}+\frac{1}{n^2-3^2}-\frac{1}{n^2-4^2}+\&c.$$

Se in questo resultato supporremo $n=\frac{h}{k}$, avrassi riducendo la serie

$$\frac{1}{2h^2}-\frac{\pi}{2hk.}sen.\frac{h.\pi}{k}=\frac{1}{h^2-k^2}-\frac{1}{h^2-2^2k^2}+\frac{1}{h^2-3^2k^2}-\&c.$$

resultato che per induzione Euler dedusse dalla considerazione degli infiniti fattori nei quali si decompone la funzione esponenziale $e^{\omega}+e^{-\omega}$.

Se nella serie

$$cos.n\varphi=\frac{sen.n\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{n}-2n\left(\frac{cos.\varphi}{n^2-1}-\frac{cos.2\varphi}{n^2-2^2}+\frac{cos.3\varphi}{n^2-3^2}-\&c.\right)\right\}$$

faremo $\varphi=\pi$, troveremo

$$\frac{\pi}{2n}.\frac{cos.n\pi}{sen.n\pi}=\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-2^2}+\frac{1}{n^2-3^2}+\ldots\ldots$$

cioè facendovi $n=\frac{h}{k}$

$$\frac{1}{2h^2}-\frac{\pi}{2h.k};cot.\frac{h}{k}.\pi=\frac{1}{k^2-h^2}+\frac{1}{2^2k^2-h^2}+\frac{1}{3^2k^2-h^2}+\&c.$$

serie che come la precedente dedusse Euler dalla decomposizione della esponenziale $e^{\omega}+e^{-\omega}$, e che in tal modo si trova direttamente dimostrata, e dedotta da una più generale.

XLIV.

Prima di sviluppare alcune proprietà assai osservabili di queste formule, riprendiamo la generale espressione

$$\cos. n\phi = \frac{sen. n\pi}{\pi}\left(\frac{1}{n} - 2n \left\{ \frac{\cos.\phi}{n^2 - 1} - \frac{\cos. 2\phi}{n^2 - 2^2} + \frac{\cos. 3\phi}{n^2 - 3^2} - \frac{\cos. 4\phi}{n^2 - 4^2} + \&c. \right\}\right)$$

Differenziandola due volte rapporto a ϕ, avremo

$$-n^2 . \cos. n\phi = 2n . \frac{sen. n\pi}{\pi}\left(\frac{\cos.\phi}{n^2 - 1^2} - 2^2 \frac{\cos. 2\phi}{n^2 - 2^2} + 3^2 \frac{\cos. 3\phi}{n^2 - 3^2} - \&c. \right)$$

cioè facendovi $\phi = 0$

$$-\frac{1}{2} . \frac{n\pi}{sen. n\pi} = \frac{1}{n^2 - 1} - \frac{2^2}{n^2 - 2^2} + \frac{3^2}{n^2 - 3^2} - \frac{4^2}{n^2 - 4^2} + \&c.$$

onde se l'arco qualunque y avrà il rapporto n con la mezza periferia, cioè se sarà $y = n\pi$, otterremo

$$\frac{y}{sen. y} = 2 \left\{ \frac{1}{1 - n^2} - \frac{2^2}{2^2 - n^2} + \frac{3^2}{3^2 - n^2} - \frac{4^2}{4^2 - n^2} + \&c. \right\}$$

formula dalla quale potremo speditamente calcolare il rapporto di un arco al suo seno.

Abbiamo trovato (XVII) che questo rapporto è assegnato anche dalla formula integrale

$$\frac{y}{sen. y} = 2 \int \frac{dx}{x^2 + 2x \cos. y + 1}$$

purchè la integrazione si eseguisca tra i limiti $x = 0$, $x = 1$; confrontando per tanto questa relazione con la superiore, si avrà

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x . \cos. y + 1} = \frac{1}{1 - n^2} - \frac{2^2}{2^2 - n^2} + \frac{3^2}{3^2 - n^2} - \&c.$$

ove $y = \pi n$.

Se supporremo $n = \frac{1}{2}$, sarà $\cos. y = \cos. \frac{1}{2}\pi = 0$; e quindi

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{2^2}{2^2 - 1} - \frac{4^2}{4^2 - 1} + \frac{6^2}{6^2 - 1} - \&c.$$

come precedentemente abbiamo trovato (XL).

Queste formule sono tutte altrettanti corollarj della serie riportata in principio di questo articolo

$$\cos. n\varphi = \frac{sen. n\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{n} - 2n \left(\frac{\cos.\varphi}{n^2-1} - \frac{\cos. 2\varphi}{n^2-2^2} + \frac{\cos. 3\varphi}{n^2-3^2} - \&c. \right) \right\}$$

dalla quale, oltre le indicate, si possono dedurre molte altre conseguenze. Così differenziandola $2m$ volte rapporto a φ, avremo facendovi $\varphi = 0$,

$$\pm \frac{n^{2m-1}\pi}{2. sen. n\pi} = \mp \left\{ \frac{1}{n^2-1} - \frac{2^{2m}}{n^2-2^2} + \frac{3^{2m}}{n^2-3^2} - \&c. \right\}$$

ove il segno superiore conviene ad m pari, e l'inferiore ad m dispari. Facendovi $n = 0$, ne ricaveremo

$$0 = 1 - 2^{2m} + 3^{2m} - 4^{2m} + \&c.$$

serie conosciuta, della quale abbiamo precedentemente fatto uso (XVI).

XLV.

Nell' articolo (XLIII) siamo pervenuti alla formula

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{\pi}{2n. sen. n\pi} = \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-2^2} + \frac{1}{n^2-3^2} - \frac{1}{n^2-4^2} + \&c.$$

Se svolgeremo per le potenze di n così il primo, come il secondo membro di questa Equazione, potremo dal paragone dei termini moltiplicati per le medesime potestà della n dedurne tutte le potenze pari di π, svolte in serie numeriche. Facciamo per maggior semplicità

$$1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \&c. = \Sigma \frac{1}{x^m}$$

ciò posto, è chiaro che la nostra equazione potrà prendere la forma

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{\pi}{2n.\mathrm{sen}.n\pi} = -\Sigma.\frac{1}{x^2} - n^2\Sigma.\frac{1}{x^4} - n^4\Sigma\frac{1}{x^6} - \&c.$$

Pertanto tutto si ridurrà a svolgere in serie per le potenze di n il primo membro di questa equazione, o più semplicemente, ad ordinare per le potestà di $n\pi$ la funzione $\frac{1}{\mathrm{sen}.n\pi}$. Se dunque faremo

$$\frac{1}{\mathrm{sen}.n\pi} = \frac{1}{n\pi} + A n\pi + A_3 n^3\pi^3 + A_5 n^5\pi^5 + \ldots + A_{2h+1} n^{2h+1}.\pi^{2h+1} + \&c.$$

avremo, sostituendo nella precedente equazione, dal confronto dei termini la generale relazione

$$\frac{A_{2h+1}}{2}.\pi^{2h+2} = \Sigma.\frac{1}{x^{2h+2}}$$

ossia, cambiando h in $h-1$

$$\tfrac{1}{2} A_{2h-1}.\pi^{2h} = \Sigma.\frac{1}{x^{2h}}$$

sostituendo adesso in luogo di $\Sigma\frac{1}{x^{2h}}$ la serie che rappresenta, avremo

$$\tfrac{1}{2} A_{2h-1}.\pi^{2h} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{2h}} + \frac{1}{5^{2h}} - \&c.$$

Egli è chiaro adesso che il secondo membro di questa Equazione all'accrescersi di h converge sempre verso l'unità, in modo che rapporto all'indefinito incremento di questa quantità, l'unità è il limite della espressione

$$1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \&c.$$

Quindi per un valore assai grande di h, avremo prossimamente

$$\frac{1}{2} A_{2h-1} \cdot \pi^{2h} = 1$$

cioè

$$\pi = \sqrt[2h]{\frac{2}{A_{2h-1}}}$$

Il che offre una proprietà assai osservabile dei coefficienti numerici della funzione $\frac{1}{sen.\, u}$ svolta per le potenze di u, ossia della cosecante di un' arco. Converrà pertanto esaminare, come una tale evoluzione possa effettuarsi.

XLVI.

Facciamo per tanto

$$\frac{1}{sen.\, u} = \frac{1}{u} + A u + A_3 u^3 + A_5 u^5 + \ldots\ldots + A_{2h-1} u^{2h-1} + \ldots\ldots$$

Moltiplicando per u, avremo

$$\frac{u}{sen.\, u} = 1 + A u^2 + A_3 u^4 + A_5 u^6 + \ldots\ldots + A_{2h-1} u^{2h} + \ldots\ldots$$

Ed il general coefficiente A_{2h-1} sarà determinato dalla Equazione

$$A_{2h-1} = \frac{d^{2h} \cdot \frac{u}{sen.\, u}}{1.2.3\ldots\ldots 2h.\, d u^{2h}}$$

facendo $u = 0$ dopo le differenziazioni. Ma se queste si effettuassero, facile si è a vedersi che sempre si otterrebbero dei resultati della forma $\frac{0}{0}$, onde converrebbe mettere in opera una moltiplicità di operazioni, che permetterebbero difficilmente di conoscere la legge dei termini. Per evitar questo inconveniente riprendiamo la formula $\frac{u}{sen.\, u}$; abbiamo

$$sen.\ u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

onde sostituendo, sarà, facendo per semplicità maggiore, $\frac{u}{sen.\,u} = \mathrm{K}$,

$$\mathrm{K} = \frac{2u\sqrt{-1}}{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}$$

cioè, ponendo $u\sqrt{-1} = z$,

$$\mathrm{K} = \frac{2ze^{z}}{e^{2z} - 1}$$

Questa ultima frazione si decompone facilmente in due, in modo che si ha

$$\mathrm{K} = \frac{z}{e^{z} - 1} + \frac{z}{e^{z} + 1}$$

E tutto per conseguenza si ridurrà a cercar lo sviluppo per le potenze di z del secondo membro di questa Equazione; Egli è chiaro adesso che il termine $\frac{z}{e^{z}-1}$ presenta la stessa difficoltà che nella proposta funzione s'incontra, ma la eviteremo, impiegando un artifizio di calcolo dovuto al sig. Laplace, che si è imbattuto nella funzione $\frac{z}{e^{z}-1}$ cercando di sviluppare le analogie dei differenziali con le potenze. La funzione $\frac{z}{e^{z}-1}$ facilmente si decompone nelle due $\frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}-1} - \frac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}+1}$; ed è inoltre evidente che nel caso di $z = 0$ si ha

$$\frac{d^{q}\left(\frac{pz}{e^{pz} \pm 1}\right)}{(p\,dz)^{q}} = p^{q}\,\frac{d^{q}\left\{\frac{z}{e^{z} \pm 1}\right\}}{dz^{q}}$$

poichè impunemente possiamo in luogo di z sostituire un suo multiplo, che svanisce contemporaneamente a quella quantità. Quindi facendo $p=\frac{1}{2}$, $q=n$, avrassi

$$\frac{d^n\left\{\dfrac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}-1}\right\}}{dz^n}-\frac{d^n\left\{\dfrac{\frac{1}{2}z}{e^{\frac{1}{2}z}+1}\right\}}{dz^n}=\frac{1}{2^n}\frac{d^n\left\{\dfrac{z}{e^z-1}\right\}}{dz^n}-\frac{1}{2^n}\frac{d^n\left\{\dfrac{z}{e^z+1}\right\}}{dz^n}$$

$$=\frac{d^n\dfrac{z}{e^z-1}}{dz^n}$$

onde immediatamente dedurremo

$$\frac{d^n\dfrac{z}{e^z-1}}{dz^n}=-\frac{1}{2^n-1}\frac{d^n\dfrac{z}{e^z+1}}{dz^n}$$

Riprendendo ora la Equazione

$$K=\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{e^z+1}$$

si avrà, mediante le riduzioni ottenute

$$\frac{d^nK}{dz^n}=\frac{d^n\dfrac{z}{e^z+1}}{dz^n}\left(1-\frac{1}{2^n-1}\right)=\frac{2^n-2}{2^n-1}\cdot\frac{d^n\dfrac{z}{e^z+1}}{dz^n}$$

dalla qual formula potremo facilmente avere lo sviluppo della funzione K per le potenze di z.

Si può ancora il differenziale n^{esimo} di K maggiormente semplicizzare, osservando che avendosi

$$\frac{z}{e^z+1}=z\,(e^z+1)^{-1}$$

sarà anche

$$d^n z (e^z+1)^{-1} = d^n z . (e^z+1)^{-1} + n . d^{n-1} z . d(e^z+1)^{-1} + \ldots\ldots$$

$$+ n\, dz . d^{n-1}(e^z+1)^{-1} + z\, d^n (e^z+1)^{-1}$$

La supposizione di $z=0$ riduce manifestamente questa quantità ad $n\, dz . d^{n-1}(e^z+1)^{-1}$, poichè nella ipotesi di dz costante, le quantità $d^2 z$, $d^3 z$, &c. sono tutte nulle. Sarà pertanto, nella supposizione di $z=0$,

$$\frac{d^n \frac{z}{e^z+1}}{dz^n} = n \frac{d^{n-1} \frac{1}{e^z+1}}{dz^{n-1}}$$

e quindi sostituendo

$$\frac{d^n K}{dz^n} = \frac{n(2^n-2)}{2^n-1} \frac{d^{n-1} \frac{1}{e^z+1}}{dz^{n-1}}$$

Dalla qual formula potremo ottenere facilmente la evoluzione della funzione K per le potenze ascendenti di z, ed essendo $z = u\sqrt{-1}$, e $K = \frac{u}{sen.u}$ si avrà in conseguenza lo sviluppo della funzione $\frac{u}{sen.u}$, che ci si siamo proposti di ottenere. Non ci tratterremo ad esaminar davvantaggio un tale sviluppo, poichè vedremo in seguito un' altra maniera per ottenerlo, e perchè si potrà esserne pienamente istrutti nella bella memoria del Sig. Laplace inserita negli atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1777.

XLVII.

Pertanto essendo, come sul principio del precedente articolo abbiamo veduto,

$$A_{2h-1} = \frac{1}{2.3....2h} \cdot \frac{d^{2h} \frac{u}{sen.\, u}}{d u^{2h}}$$

purchè si faccia $u=0$ dopo le differenziazioni, sarà ancora

$$A_{2h-1} = \frac{1}{2.3....2h} \cdot \frac{2h.(2^{2h}-2)}{2^{2h}-1} \frac{d^{2h-1} \frac{1}{e^z+1}}{d z^{2h-1}}$$

facendo $z=0$ dopo le differenziazioni. E da questa formula ritrarremo il modo di aver la somma della serie

$$1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{2h}} + \&c.$$

poichè si ha (XLV)

$$\tfrac{1}{2} A_{2h-1} \cdot \pi^{2h} = 1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{h}} + \ldots\ldots$$

Dal modo con cui abbiamo determinata la quantità A^{2h-1}, vedremo discendere le celebri zrelaioni che passano tra le serie

$$1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{2h}} + \ldots.$$

$$1 - 2^{2h-1} + 3^{2h-1} - 4^{2h-1} + \&c.$$

Di quest'ultima si può infatti rappresentar la somma (XVI) mediante la formula

$$\frac{y\,dy\,dy\ldots\ldots d\frac{1}{1+y}}{d\,y^{2h-1}}$$

purchè si faccia $y=1$ dopo le differenziazioni. La general funzione $\frac{y\,dy\,dy\ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{d\,y^n}$ si può ridurre adesso ad una più comoda

forma mediante una trasformazione di variabile. Suppongasi infatti

$$\frac{y\,dy\,dy\ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^n} = \frac{d^n P}{dz^n} \quad \ldots\ldots (b)$$

ove P è funzione di z, e z è funzione di y. Facciamo $y = \Psi z$, e differenziando la Equazione (b) rapporto ad y, e moltiplicando quindi per y, avremo

$$\frac{y\,dy\,dy\ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^{n+1}} = \frac{y\,d^{n+1} P}{dy . dz^n}$$

ma essendo $y = \Psi z$, sarà $dy = \frac{d\Psi z}{dz} dz$; onde sostituendo si otterrà

$$\frac{y\,dy\,dy\ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^{n+1}} = \frac{\Psi z}{\frac{d\Psi z}{dz}} . \frac{d^{n+1} P}{dz^{n+1}}$$

ma se nella Equazione (b) varieremo n in $n+1$, sarà ancora

$$\frac{y\,dy\,dy\ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^{n+1}} = \frac{d^{n+1} P}{dz^{n+1}}$$

onde paragonando questi due resultati, sarà

$$\frac{d^{n+1} P}{dz^{n+1}} = \frac{\Psi z}{\frac{d\Psi z}{dz}} . \frac{d^{n+1} P}{dz^{n+1}}$$

ossia

$$\frac{d\Psi z}{dz} = \Psi z$$

e quindi $\Psi z = ae^z$, o più semplicemente $\Psi z = e^z$. Avremo dunque $y = \Psi z = e^z$. Per avere il valore di P, riprendiamo la Equazione (b)

$$(b) \ldots\ldots \frac{y\,dy\,dy\ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^n} = \frac{d^n P}{dz^n}$$

e facendovi $n = 0$, sarà

$$P = \frac{1}{1+y}$$

cioè $P = \frac{1}{1+e^z}$. Pertanto, supponendo $y = e^z$, avremo

$$\frac{y\,dy\,dy \ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^n} = \frac{d^n \frac{1}{1+e^z}}{dz^n}.$$

Abbiamo ora, facendo $y = 1$ dopo le differenziazioni

$$\frac{y\,dy \ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^{2h-1}} = 1 - 2^{2h-1} + 3^{2h-1} - 4^{2h-1} + \ldots\ldots$$

e per conseguenza, essendo $y = e^z$, sarà ancora

$$\frac{d^{2h-1} \frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}} = 1 - 2^{2h-1} + 3^{2h-1} - 4^{2h-1} + \&c.$$

purchè si faccia $z = 0$ dopo le differenziazioni.

Ma supponendo $z = 0$ dopo le differenziazioni, noi abbiamo

$$A_{2h-1} = \frac{1}{2.3\ldots.(2h-1)} \cdot \frac{(2^{2h}-2)}{2^{2h}-1} \frac{d^{2h-1} \frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}}$$

quindi, sostituendovi il precedente valore di $\frac{d^{2h-1} \frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}}$, sarà

$$A_{2h-1} = \frac{1}{2.3\ldots(2h-1)} \frac{2^{2h}-2}{2^{2h}-1} \left\{ 1 - 2^{2h-1} + 3^{2h-1} - 4^{2h-1} + \&c. \right\}$$

ed avendosi

$$\frac{1}{2} A_{2h-1} \cdot \pi^{2h} = 1 - \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} - \frac{1}{4^{2h}} + \ldots.$$

sarà anche, sostituendovi il trovato valore di A_{2-1}

$$\frac{\pi^{2h}}{2.3\ldots(2h-1)}\frac{(2^{2h-1}-1)}{(2^{2h}-1)}\left\{1-2^{2h-1}+3^{2h-1}-4\quad+\ldots\right\}$$

$$=-1\,h\,\frac{1}{2^{2h}}+\frac{1}{3^{2h}}-\frac{1}{4^{2h}}+\ldots$$

celebre relazione, che Euler ritrovò per induzione, e che inseguito è stata da varj illustri Geometri dimostrata.

La serie

$$1-2^{2h}-+3^{2h-1}-4^{2h-1}+\&c.$$

moltiplicata per il coefficiente $\pm\frac{2h}{(2^{2h}-1)2^{2h}}$, ove il segno superiore appartiene ad h dispari, e l' inferiore ad h pari, rappresenta, come è noto, il termine generale dei numeri di Bernoulli, che tanto influiscono nella general Teoria delle serie. Abbiamo veduto che la quantità

$$1-2^{h-1}+3^{2h-1}-4^{2h-1}+\&c.$$

può essere espressa dalla formula $\frac{d^{2h-1}\frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}}$, purchè si faccia $z=0$ dopo le differenziazioni. Chiamando dunque U il termine generale dei numeri di Bernoulli, sarà

$$U=\pm\frac{2h}{(2^{2h}-1)2^{2h}}\;\frac{d^{2h-1}\frac{1}{1+e^z}}{dz^{2h-1}}$$

essendo U determinato come sopra, effettuate le differenziazioni.

XLVIII.

Abbiamo nel precedente articolo veduto come la funzione $\frac{y\,dy\,dy \ldots dy\,d\frac{1}{1+y}}{dy^n}$ si può sempre ridurre alla forma $\frac{d^n\,P}{d\,z^n}$ essendo P una funzione conosciuta di z, e z una funzione parimente conosciuta di y. Una simile riduzione ha luogo ancora per la funzione molto più complicata $\frac{s\,d\,s\,d\,s \ldots d\,F\,y}{dy^n}$ ove s è una qualunque funzione di y. Facciamo infatti

$$\frac{s\,d\,s\,d\,s \ldots\ldots d\,F\,y}{d\,y^n} = \frac{d^n\,P}{d\,z^n}$$

Noi avremo differenziando rapporto ad y, e moltiplicando per s,

$$\frac{s\,d\,s\,d\,s \ldots\ldots d\,F\,y}{d\,y^{n+1}} = \frac{s\,d^{n+1}P}{dy.d\,z^n}$$

Ma variando n in $n+1$ abbiamo ancora

$$\frac{s\,d\,s\,d\,s\,.\,.\,.\,.\,.\,d\,F\,y}{d\,y^{n+1}} = \frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}}$$

Onde si otterrà la Equazione

$$\frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}} = \frac{s\,d^{n+1}\,P}{dy\,.\,d\,z^n}$$

Ma essendo y una funzione di z, che denoteremo $\Psi\,z$, avremo anche

$$d\,y = \frac{d\,\Psi\,z}{d\,z}\,.\,d\,z$$

E quindi sostituendo, sarà

$$\frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}} = s.\frac{d^{n+1}\,P}{d\,z^{n+1}}\,.\,\frac{1}{\frac{d\,\Psi\,z}{d\,z}}$$

dovrà essere dunque

$$s = \frac{d \Psi z}{d z}$$

Da questa Equazione, sostituendo nella quantità s in luogo di y il suo valore Ψz troveremo integrando il valore di Ψz espresso per z, ed in tal modo sarà conosciuto il valore di y. Facendo poi nella Equazione

$$\frac{s\, d\, s \ldots\ldots d F y}{d y^n} = \frac{d^n P}{d z^n}$$

la $n = 0$, avremo $P = F y$, cioè $P = F . \Psi z$ il che darà la completa soluzione del problema.

IL.

Le cose precedenti ci saranno molto utili quando parleremo della integrazione delle Equazioni a differenze parziali. Ma non possiamo quì dispensarci dall'indicare un modo assai semplice di ottenere sotto una nuova forma l' espressione del termine generale dei numeri di Bernoulli, che discende da queste trasformazioni.

Consideriamo la formula generale

$$\frac{y\, d y\, d y \ldots . d F y}{d y^n}$$

Facilmente ci persuaderemo dalle successive operazioni indicate in questa formula, che potremo metterla sotto la forma

$$\frac{y\, d y \ldots d F y}{d y^n} = y^n \frac{d^n F y}{d y^n} + A_n \frac{d^{n-1} F y}{d y^{n-1}} . y^{n-1} + B_n \frac{d^{n-2} F y}{d y^{n-2}} . y^{n-2}$$

$$+ C_n y^{n-3} \frac{d^{n-3} . F y}{d y^{n-3}} + \ldots\ldots . (\lambda)$$

Differenziando rapporto ad y, e moltiplicando quindi per y, si otterrà

$$\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots\ldots d\,\mathrm{F}y}{d\,y^{n+1}} = y^{n+1}\frac{d^{n+1}\,\mathrm{F}\,y}{d\,y^{n+1}} + n\,y^{n}\frac{d^{n}\,\mathrm{F}\,y}{d\,y^{n}} + (n-1)\,\mathrm{A}_n\,y^{n-1}\frac{d^{n-1}\,\mathrm{F}y}{d\,y^{n-1}}$$

$$+ (n-2)\,\mathrm{B}_n\,y^{n-2}\frac{d^{n-2}\,\mathrm{F}y}{d\,y^{n-2}} + \&c.$$

$$+ \mathrm{A}_n\,y^{n}\frac{d^{n}\,\mathrm{F}y}{d\,y^{n}} + \mathrm{B}_n\cdot y^{n-1}\frac{d^{n-1}\,\mathrm{F}y}{d\,y^{n-1}} + \mathrm{C}_n\,y^{n-2}\frac{d^{n-2}\,\mathrm{F}y}{d\,y^{n-2}} + \&c.$$

Ma variando nella formula (λ) n in $n+1$, si avrà ancora

$$\frac{y\,d\,y\,d\,y\ldots d\,\mathrm{F}\,y}{d\,y^{n+1}} = y^{n+1}\frac{d^{n+1}\,\mathrm{F}y}{d\,y^{n+1}} + \mathrm{A}_{n+1}\,y^{n}\frac{d^{n}\,\mathrm{F}y}{d\,y^{n}} + \mathrm{B}_{n+1}\,y^{n-1}\frac{d^{n-1}\,\mathrm{F}y}{d\,y^{n-1}}$$

$$+ \mathrm{C}_{n+1}\,y^{n-2}\frac{d^{n-2}\,\mathrm{F}\,y}{d\,y^{n-2}} + \&c.$$

ossia, paragonando i diversi coefficienti delle quantità della forma $y^{m}\frac{d^{m}\,\mathrm{F}\,y}{d\,y^{m}}$, avremo per determinarli la serie seguente di Equazioni

$$\mathrm{A}_n + n = \mathrm{A}_{n+1}$$

$$\mathrm{B}_n + (n-1)\,\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_{n+1}$$

$$\mathrm{C}_n + (n-2)\,\mathrm{B}_n = \mathrm{C}_{n+1}$$

$$\mathrm{D}_n + (n-3)\,\mathrm{C}_n = \mathrm{D}_{n+1}$$

$$\vdots$$

$$\&c.$$

cioè integrando, ed avvertendo per la determinazione delle arbitrarie che tutto deve ridursi a zero se $n=0$, si avrà

$$A_n = \Sigma\, n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$B_n = \Sigma\,(n-1)\,\Sigma\, n = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(3\,n-5)}{2\,.\,3\,.\,4}$$

$$C_n = \Sigma\,(n-2)\,\Sigma\,(n-1)\,\Sigma\, n = \frac{n(n-1)\,(n-2)^2\,(n-3)^2}{2\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$D_n = \Sigma\,(n-3)\,\Sigma\,(n-2)\,\Sigma\,(n-1)\,\Sigma\, n = \&c.$$

Sostituendo questi valori nella general formula (λ) si avrà

$$\frac{ydydy....dFy}{dy^n} = y^n\frac{d^n Fy}{dy^n} + \Sigma\, n\; y^{n-1}\frac{d^{n-1} Fy}{dy^{n-1}} + \Sigma(n-1)\,\Sigma n\; y^{n-2}\frac{d^{n-2} Fy}{dy^{n-2}}$$

$$+ \Sigma(n-2)\,\Sigma\,(n-1)\;\Sigma\, n\,.\,y^{n-3}\;\frac{d^{n-3} Fy}{dy^{n-3}} + \&c.$$

Se fosse $Fy = \frac{1}{1+y}$, e si volesse il valore della funzione $\frac{ydydy....d\frac{1}{1+y}}{dy^n}$ nel caso di $y=1$, si avrebbe in primo luogo $\frac{d^n Fy}{dy^n} = \pm\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}{(1+y)^{n+1}}$, ove il segno superiore appartiene al caso di n pari, e l' inferiore al caso di n dispari. Onde, se $y=1$, avremo $\frac{d^n Fy}{dy^n} = \pm\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.....\,n}{2^{n+1}}$. E sostituendo sarà

$$\frac{ydydy....d\frac{1}{1+y}}{dy^n} = \pm\Big\{\frac{1.2.3..n}{2^{n+1}} - \frac{1.2.3..n-1}{2^n}\Sigma n + \frac{1.2.3..n-2}{2^{n-1}}.\Sigma(n-1)\Sigma n$$

$$- \frac{1.2.3......n-3}{2^{n-2}}.\Sigma\;(n-2)\Sigma\,(n-1)\Sigma\, n + \&c.\Big\}$$

e questo sarà in conseguenza ancora il valore della funzione

$\frac{d^n \frac{1}{1+e^z}}{d z^n}$, facendo $z=0$ dopo le differenziazioni. Abbiamo adesso veduto (XLVII) che il termine generale dei numeri di Bernoulli è espresso dalla Equazione

$$s = \pm \frac{2h}{(2^{2h}-1)\, 2^{2h}} \cdot \frac{d^{2h-1} \frac{1}{1+e^z}}{d z^{2h-1}},$$

facendovi $z=0$ dopo le differenziazioni; Se dunque nel precedente valore di $\frac{d^n \frac{1}{1+e^z}}{d z^n}$ metteremo in luogo di n, la quantità $2h-1$, avremo, avvertendo che $2h-1$ è dispari, questa nuova espressione dei numeri di Bernoulli:

$$s = \mp \frac{2h}{(2^{2h}-1)2^{2h}} \left\{ \frac{1.2.3...(2h-1)}{2^{2h}} - \frac{1.2.3..(2h-2)}{2^{2h-1}} . \Sigma(2h-1) \right.$$
$$\left. + \frac{1.2.3..(2h-3)}{2^{2h-1}} \Sigma(2h-2)\Sigma(2h-1) - \&c. \right\}$$

L.

A tutti questi resultati siamo stati condotti dall'esame delle serie assai osservabili che abbiamo ottenute per i seni, e coseni degli archi circolari (XXXV, *e seg.*). Si potrebbero moltiplicare quelle ricerche, e ricavarne altre formule egualmente curiose, ed eleganti; ma, per servire alla brevità, piuttosto passeremo ad applicare quel metodo di cui ci siamo serviti alla generale Teoria delle serie.

Consideriamo in primo luogo una funzione z di x tale che si abbia svolgendola in serie per le potenze ascendenti di questa variabile

$$z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Noi avremo, come è noto dal calcolo differenziale

$$a_n = \frac{1}{1.2.3\ldots.n} \cdot \frac{d^n z}{dx^n}$$

facendo $x=0$ dopo le differenziazioni. Egli è chiaro adesso che sostituendo in z in luogo di x la quantità $\frac{1}{x}$, se chiameremo z' la funzione che ne resulta, si avrà

$$z' = a + a_1 \cdot \frac{1}{x} + a_2 \cdot \frac{1}{x^2} + a_3 \cdot \frac{1}{x^3} + \ldots..$$

Aggiungendo con la serie precedente, otterremo

$$\frac{z+z'}{2} = a + a_1 \left(x + \frac{1}{x}\right) + a_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_3\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \&c.$$

ossia facendovi $x = e^{\varphi\sqrt{-1}}$, e chiamando u, u' quello che dopo tali sostituzioni diverranno z, z', avremo

$$\frac{u+u'}{2} = a + a_1 \cos.\varphi + a_2 \cos. 2\varphi + a_3 \cos. 3\varphi + \ldots\ldots + a_n \cos. n\varphi + \ldots\ldots$$

Il termine generale di questa serie sarà determinato, come sappiamo (XXIX) dalla formula

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int (u + u')\, d\varphi . \cos. n\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; ed essendo

$$a_n = \frac{1}{1.2.3\ldots.n} \cdot \frac{d^n z}{dx^n}$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni, sarà anche

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{1.2.3....n}{\pi} \int (u + u')\, d\varphi . \cos. n\varphi.$$

Se adesso in luogo di x si porrà $x + y$, avremo con tal mezzo i differenziali di qualunque ordine di una funzione z, rapporto ad y, sempre espressi da un' integrale definito.

LI.

Questo Teorema può anche estendersi ad un numero qualunque di variabili. Consideriamo infatti una funzione z di x, ed y; e supponghiamo che svolgendola per le potenze di x si abbia

$$z = a + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n x^n + \&c.$$

noi avremo

$$a_n = \frac{1}{2.3...n} \left(\frac{d^n z}{d x^n} \right)$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni. Allorchè noi vorremo la funzione z svolta in serie per le potenze, ed i prodotti delle due vavariabili x, ed y, converrà svolgere in serie per le potenze di y tutte le quantità a, a_1, a_2....a_n, &c. cioè le quantità z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$, $\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$.........$\frac{1}{2.3...n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)$, ove dopo le differenziazioni è stato posto $x = 0$.

Quindi resulta che nella evoluzione della funzione n, il coefficiente di $x^n\, y^m$ sarà

$$\frac{1}{2.3....n.1.2.3...m} \left(\frac{d^{m+n} z}{d\, x^n . \, d y^m} \right)$$

facendovi dopo le differenziazioni $x = y = 0$.

Se dunque in luogo di x sostituiremo nella funzione z la quantità $e^{\varphi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, e chiameremo u, u' i resultati di queste sostituzioni, avremo per le cose precedenti (L)

$$\frac{1}{2.3\ldots n}\cdot\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)=\frac{1}{\pi}\int(u+u')\cos.n\varphi.d\varphi$$

Facendo inoltre nella funzione $\frac{1}{\pi}\int(u+u')\cos.n\varphi.d\varphi$ prima $y=e^{\Psi\sqrt{-1}}$, quindi $y=e^{-\Psi\sqrt{-1}}$, e chiamando k, k' quello che si otterrà, avremo evidentemente

$$\frac{1}{2.3..n.2.3...m}\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^n.dy^m}\right)=\frac{1}{\pi}\int(k+k')\cos.m\Psi.d\Psi$$

integrando al solito tra i limiti $\Psi=0$, $\Psi=\pi$.

Facciamo $z=F(x,y)$; e sarà

$$u=F(e^{\varphi\sqrt{-1}},y)$$

$$u'=F(e^{-\varphi\sqrt{-1}},y)$$

ed avremo anche

$$k=\int\left\{F(e^{\varphi\sqrt{-1}},e^{\Psi\sqrt{-1}})+F(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{\Psi\sqrt{-1}})\right\}\cos.n\varphi.d\varphi$$

$$k'=\int\left\{F(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{-\Psi\sqrt{-1}})+F(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{-\Psi\sqrt{-1}})\right\}\cos.n\varphi.d\varphi:$$

Onde sostituendo, sarà per l'indipendenza delle variabili

$$\frac{\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^n.dy^m}\right)}{1.2.3...n.1.2.3...m}=\int\int\left\{F(e^{\varphi\sqrt{-1}},e^{\Psi\sqrt{-1}})+F(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{\Psi\sqrt{-1}})\right.$$

$$\left.+F(e^{-\varphi\sqrt{-1}},e^{-\Psi\sqrt{-1}})+F(e^{\varphi\sqrt{-1}},e^{-\Psi\sqrt{-1}})\right\}\cos n\varphi.\cos.m\Psi\, d\varphi.d\Psi.$$

Quindi facilmente apparisce come dovremo contenerci se il numero delle variabili sarà maggiore. Sia data la formula $F(x, y, u, t, \&c.)$; noi aggiungeremo insieme altrettante funzioni della forma

$$F\left(e^{\pm\varphi\sqrt{-1}}, e^{\pm\Psi\sqrt{-1}}, e^{\pm\delta\sqrt{-1}}, \ldots\right)$$

in quanti modi è possibile il permutare tra di loro i segni delle quantità $\pm\varphi\sqrt{-1}$, $\pm\Psi\sqrt{-1}$, $\pm\delta\sqrt{-1}$, &c. chiamata Σ questa somma, avremo

$$\frac{\left(\frac{d^{m+n+p+\ldots} z}{dx^m\, dy^n\, du^p \ldots}\right)}{1.2..m.1.2..n.1.2..p\ldots} = \int^K \Sigma.\cos. m\varphi.\cos. n\Psi.\cos. p\delta \ldots d\varphi.d\Psi.d\delta \ldots$$

ove $k =$ al numero delle variabili, e dove le integrazioni vanno estese da $\varphi = \Psi = \delta = \cdots = 0$, fino a $\varphi = \Psi = \delta = \cdots = \pi$, purchè si faccia $x = y = u = \cdots = 0$ dopo le differenziazioni.

LII.

Consideriamo attualmente le serie infinite

$$z = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

$$z' = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

e supponghiamo che vogliasi la somma della serie infinita

$$A a + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots + A_n a_n + \ldots$$

Per le cose precedenti (L) facilmente giungeremo alle Equazioni

$$(1)\quad \frac{u+u'}{2} = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots + A_n \cos. n\varphi + \ldots$$

$$(2)\quad \frac{k+k'}{2} = a + a_1 \cos.\varphi + a_2 \cos. 2\varphi + \ldots + a_n \cos. n\varphi + \ldots$$

ove u, u' sono quello che z diviene facendovi successivamente $x = e^{\varphi\sqrt{-1}}$, $x = e^{-\varphi\sqrt{-1}}$; e lo stesso dicasi di k, e k' relativamente alla funzione z'. Moltiplicando adesso la serie (1) per $\frac{k+k'}{2}\, d\varphi$, ed integrando, avremo

$$\frac{1}{4}\int (u+u')(k+k')\,d\varphi = \mathrm{A}\int \frac{k+k'}{2}\,d\varphi$$

$$+\mathrm{A}_1 \int \frac{k+k'}{2} cos.\varphi . d\varphi + \mathrm{A}_2 \int \frac{k+k'}{2} cos.\, 2\varphi\, d\varphi$$

$$\ldots + \mathrm{A}_n \int \frac{k+k'}{2} cos.\, n\varphi . d\varphi + \ldots$$

Se prenderemo questi integrali tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, avremo, dividendo per π

$$\frac{\int (k+k')\, cos.\, n\varphi . d\varphi}{\pi} = a_n$$

Quindi sostituendo, avremo immediatamente

$$\frac{1}{2\pi}\int (u+u')(k+k')\,d\varphi - \mathrm{A}\,a = \mathrm{A}\,a + \mathrm{A}_1 a_1 + \mathrm{A}_2 a_2 + \ldots + \mathrm{A}_n a_n + \ldots$$

Il problema di cui ci siamo occupati è stato per la prima volta risoluto dal Cel. Parseval, per una strada diversa da quella da noi impiegata. Egli lo ha con successo applicato alla integrazione di alcune Equazioni a differenze parziali, e particolarmente a quella che rappresenta le generali condizioni del moto dei fluidi.

LIII.

Col metodo stesso con cui abbiamo dimostrato questo Teorema, potremo anche generalizzarlo, ed applicarlo al caso in cui le due serie proposte dipendano da più variabili. Siano infatti proposte le due serie

$$R = a_{0,0} + a_{1,0}\,y + a_{0,1}\,x + a_{2,0}\,y^2 + a_{1,1}\,xy + a_{0,2}\,x^2 + \&c.$$

$$R' = b_{0,0} + b_{1,0}\,y + b_{0,1}\,x + b_{2,0}\,y^2 + b_{1,1}\,xy + b_{0,2}\,x^2 + \&c.$$

facendo $y = e^{\theta\sqrt{-1}}$, quindi $y = e^{-\theta\sqrt{-1}}$, avremo, chiamando S, S' quello che diviene R per queste sostituzioni, e T, T' quello che diviene R'

$$\frac{S+S'}{2} = a_{0,0} + a_{1,0}\cos.\theta + a_{0,1}\,x + a_{2,0}\cos.2\theta + a_{1,1}\,x\cos.\theta + a_{0,2}\,x^2 + ..$$

$$\frac{T+T'}{2} = b_{0,0} + b_{1,0}\cos.\theta + b_{0,1}\,x + b_{2,0}\cos.2\theta + b_{1,1}\,x\cos.\theta + b_{0,2}\,x^2 + ...$$

Parimente in queste Equazioni facendo $x = e^{\delta\sqrt{-1}}$, $x = e^{-\delta\sqrt{-1}}$ avremo, chiamando μ, μ' le rispettive somme dei parziali resultati che otterremo con tali sostituzioni per ciascuno dei primi membri di queste Equazioni

$$\mu = a_{0,0} + a_{1,0}\cos.\theta + a_{0,1}\cos.\delta + a_{2,0}\cos.2\theta + a_{1,1}\cos.\delta.\cos.\theta + a_{0,2}\cos.2\delta + ..$$

$$\mu' = b_{0,0} + b_{1,0}\cos.\theta + b_{0,1}\cos.\delta + b_{2,0}\cos.2\theta + b_{1,1}\cos.\delta.\cos.\theta + b_{0,2}\cos.2\delta + \&c.$$

Moltiplicando adesso la prima di queste equazioni per $\mu' d\theta.d\delta$, ed integrando prima rapporto a θ, quindi a δ da $\theta = 0$ sino a $\theta = \pi$, e da $\delta = 0$ sino a $\delta = \pi$, noi avremo

$$\frac{\int^2 \mu.\mu'.d\theta.d\delta}{\pi^2} = a_{2,0}\frac{\int^2 \mu'.d\theta.d\delta}{\pi^2} + a_{1,0}\frac{\int^2 \mu'.d\theta.d\delta.\cos.\theta}{\pi^2}$$

$$+ a_{0,1}\frac{\int^2 \mu'\, d\theta.d\delta.\cos.\delta}{\pi^2} + a_{2,0}\frac{\int^2 \mu'\, d\theta.d\delta.\cos.2\delta}{\pi^2} + \&c.$$

Ma si ha per le cose precedenti (LI)

$$\frac{\int^2 \mu'\cos.n\theta.\cos.m\delta.d\theta.d\delta}{\pi^2} = a_{n,m}$$

Quindi sarà ancora

$$\frac{\int^2 \mu.\mu'.d\theta.d\delta}{\pi^2} - ab = a_{0,0}\,b_{0,0} + a_{1,0}\,b_{1,0} + a_{0,1}\,b_{0,1} + a_{1,1}.b_{1,1} + ...$$

Egli è evidente, che qualunque sia il numero delle variabili giungeremo a dei resultati simili.

LIV.

Abbiamo veduto, come date le due serie ordinate per le potenze ascendenti della variabile x

(1) $z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$

(2) $z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots$

è sempre possibile di ottenere la somma della serie che nasce dalla addizione dei prodotti $ab, a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots$,
Questo Teorema è utile quando vogliasi ottenere sotto forma finita l'integrale di una Equazione a differenze parziali che sia espresso in serie infinita, ed in una serie tale che si possa decomporre in altre due di cui sia nota la somma, e che moltiplicate termine per termine la riproducano appunto nella maniera con cui la serie

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots$$

dipende dalle serie (1), (2). Ma può spesso succedere che la serie proposta non sia suscettibile di esser decomposta in altre due conosciute, ma che per altro si possa risolvere in numero di serie maggiore di due. Date pertanto le serie

$$z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \&c.$$

$$z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \&c.$$

$$z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \&c.$$

$$\vdots$$

&c.

conviene esaminare se sia possibile di ritrovar la somma della serie

$$abc\ldots + a_1 b_1 c_1 \ldots + a_2 b_2 c_2 \ldots.$$

Vedremo adesso brevemente che anche questo caso è suscettibile di una generale evoluzione.

LV.

Supponghiamo che le serie conosciute siano tre, e da questo caso particolare vedremo come dobbiamo contenerci essendo il numero di esse qualunque. Sia dunque

$$(m) \qquad z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

$$z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

$$z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

Si sostituisca nella serie (m) in luogo di x la quantità $e^{(\phi+k)\sqrt{-1}}$, e quindi $e^{-(\phi+k)\sqrt{-1}}$; avremo, chiamando R, R' i resultati, ed aggiungendoli

$$\frac{R+R'}{2} = a + a_1 \cos.(\phi+k) + a_2 \cos.2(\phi+k) + a_3 \cos.3(\phi+k) + \&c.$$

Parimente nella stessa serie (m) si sostituisca prima $x = e^{(\phi-k)\sqrt{-1}}$, e dipoi $x = e^{-(\phi-k)\sqrt{-1}}$; chiamando R'', R''' i resultati di queste sostituzioni, avremo, aggiungendoli

$$\frac{R''+R'''}{2} = a + a_1 \cos.(\phi-k) + a_2 \cos.2(\phi-k) + a_3 \cos.3(\phi-k) + \&c.$$

E sommando questo valore di $\frac{R''+R'''}{2}$ con l'altro di $\frac{R+R'}{2}$, si avrà

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{2} = 2\left[a + a_1\left\{\frac{\cos.(\phi+k)+\cos.(\phi-k)}{2}\right\}\right.$$

$$\left. + a_2\left\{\frac{\cos.2(\phi+k)+\cos.2(\phi-k)}{2}\right\} + a_3\left\{\frac{\cos.3(\phi+k)+\cos.3(\phi-k)}{2}\right\} + \ldots\right]$$

Ma avendosi

$$\frac{\cos. p(\varphi + k) + \cos. p(\varphi - k)}{2} = \cos. p\varphi.\cos. pk$$

si avrà sostituendo

$$\frac{R + R' + R'' + R'''}{4} = a + a_1 \cos.\varphi.\cos.k + a_2 \cos.2\varphi.\cos.2k$$

$$+ a_3 \cos.3\varphi.\cos.3k + \&c.$$

Ottenuto questo resultato, riprendiamo le altre due serie

(m') $\quad z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \&c.$

(m'') $\quad z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \&c.$

Si faccia nella serie (m') $x = e^{\varphi\sqrt{-1}}$, e quindi $x = e^{-\varphi\sqrt{-1}}$; aggiungendo i resultati, e facendo questa somma $= H$, si avrà

$$\frac{H}{2} = b + b_1 \cos.\varphi + b_2 \cos.2\varphi + b_3 \cos.3\varphi + \&c.$$

Parimente nella serie (m'') ponghiamo $x = e^{k\sqrt{-1}}$, $x = e^{-k\sqrt{-1}}$, e si aggiunga; facendo il resultato $= H'$, si avrà

$$\frac{H'}{2} = c + c_1 \cos.k + c_2 \cos.2k + c_3 \cos.3k + \&c.$$

Ed avremo dalle cose precedenti (xxix)

$$\frac{2}{\pi}\int \frac{H.\cos.s\varphi}{2}.d\varphi = b_s = \frac{1}{\pi}\int H \cos.s\varphi.d\varphi$$

$$\frac{2}{\pi}\int \frac{H'\cos.sk}{2}\,dk = c_s = \frac{1}{\pi}\int H'\cos.sk.dk$$

purchè gli Integrali siano presi tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ e sarà ancora nei limiti stessi

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{H}{2}\,d\varphi = b$$

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{H'}{2}\,dk = c$$

Riprendiamo adesso la Equazione sopra ottenuta

$$\frac{R + R' + R'' + R'''}{4} = a + a_1 \cos. \varphi . \cos. k + a_2 \cos. 2 \varphi . \cos. 2 k$$
$$+ a_3 \cos. 3 \varphi . \cos. 3 k + \&c.$$

Moltiplicando da ambe le parti per $H d \varphi$, ed integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, si avrà

$$\frac{1}{\pi} \int \left\{ \frac{R + R' + R'' + R'''}{4} \right\} H d\varphi = \frac{a}{\pi} \int H d \varphi + a_1 \cos. k \int H \cos. \varphi . d \varphi + \ldots$$
$$+ a_2 \cos. 2 k \int H \cos. 2 \varphi . d\varphi + a_3 \cos. 3 k \int H \cos. 3 \varphi . d \varphi + \ldots$$
$$+ a_s \cos. s k \int H \cos. s \varphi \cdot d \varphi + \ldots$$

Ed essendo

$$\frac{1}{\pi} \int H \; d \; \varphi = 2 \; b$$

$$\frac{1}{\pi} \int H \cdot \cos. \; s \; \varphi \; . \; d \; \varphi = b_s$$

otterremo, sostituendo

$$\frac{1}{\pi} \int \left\{ \frac{R + R' + R'' + R'''}{4} \right\} H \, d \varphi = 2 \; a \, b + a_1 b_1 \cos. k + a_2 b_2 \cos. 2 \; k$$
$$+ a_3 b_3 \cos. 3 k + \ldots + a_s b_s \cos. s k + \&c.$$

Se moltiplicheremo adesso da ambe le parti per $\frac{1}{\pi} H' . \, d \, k$, avremo integrando tra i limiti $k = 0$, $k = \pi$,

$$\frac{1}{\pi} \iint \left\{ \frac{R + R' + R'' + R'''}{4} \right\} H . \; H' d\varphi . d k = \frac{2 a b}{\pi} \int H' d \; k + \frac{a_1 b_1}{\pi} \int H' \cos. k . d k$$
$$+ \frac{a_2 b_2}{\pi} \int H' \cos \; 2 k . d \; k + \cdots + \frac{a_s b_s}{\pi} \int H' \cos. s \; k . d k + \&c$$

Ma abbiamo veduto essere

$$\frac{1}{\pi}\int H'\,d\,k = 2\,c$$

$$\frac{1}{\pi}\int H'\,cos.\,s\,k\,d\,k = c_s$$

Quindi avrassi sostituendo

$$\frac{1}{\pi}\iint\left\{\frac{R+R'+R''+R'''}{4}\right\}.\,H\,.\,H'.\,d\varphi\,.\,d\,k = 4\,a\,b\,c + a_1\,b_1\,c_1$$

$$+ a_2 b_2 c_2 + \&c. + a_s\,b_s\,c_s + \&c.$$

formula che dà la completa soluzione del nostro Problema. Facilmente vedesi che questo metodo si può estèndere ad un numero qualunque di serie.

LVI.

Abbiamo (L) applicato il nostro metodo alle proprietà delle serie in genere; vediamo adesso di qual uso ci sarà per la evoluzione di alcuna delle funzioni semplici comprese nella forma $F(m+cos.\varphi)$ di cui altre ne abbiamo sviluppate sul principio di queste ricerche. Ed avendo già considerate le funzioni $log.\,(m+cos.\,\varphi)$, $\frac{1}{m+cos.\,\varphi}$ attualmente per non ritornare sulle cose stesse prenderemo ad esaminare la funzione $(m+cos.\varphi)^r$, e ci proporremo di svolgerla in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici di φ.

LVII.

Supponghiamo pertanto

$$(m+\cos.\varphi)^n = A_{n,0} + A_{n,1}\cos.\varphi + A_{n,2}\cos.2\varphi + A_{n,3}\cos.3\varphi + \ldots$$
$$+ A_{n,n}\cos n\varphi + \&c.$$

E facendo

$$z = (m+\cos.\varphi)^n$$

noi avremo differenziando

$$\left(\frac{dz}{dm}\right) = n(m+\cos.\varphi)^{n-1}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) = n(n-1)(m+\cos.\varphi)^{n-2}$$

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) = n(n-1)(m+\cos.\varphi)^{n-2} - n(n-1)\cos.^2\varphi(m+\cos.\varphi)^{n-2}$$
$$- n\cos.\varphi(m+\cos.\varphi)^{n-1}$$

Se adesso tra queste quattro Equazioni elimineremo i termini che comprendono i coseni, si avrà riducendo la equazione lineare a differenze parziali

$$(1-m^2)\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + m(2n-1)\left(\frac{dz}{dm}\right) - \left(n^2 z + \left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right)\right) = 0$$

nella quale se in luogo di z sostituiremo la serie assegnata

$$z = A_{n,0} + A_{n,1}\cos.\varphi + A_{n,2}\cos.2\varphi + A_{n,3}\cos.3\varphi + \&c.$$

otterremo per determinare $A_{n,n}$ la Equazione

$$H) \ldots \frac{d^2 A_{n,x}}{d m^2} + \frac{m(2n-1)}{1-m^2} \frac{d A_{n,x}}{dm} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2} A_{n,x} = 0$$

la quale sarà in conseguenza soddisfatta dalla formula

$$A_{n,x} = \frac{2}{\pi} \int (m + cos.\varphi)^n . cos.\, x\varphi . d\varphi$$

purchè si estendano gli integrali da $\varphi = 0$ sino a $\varphi = \pi$. Pertanto la integrazione della equazione (H) fornirà la evoluzione di questo caso.

LVIII.

Riprendiamo dunque la Equazione (H)

$$\frac{d^2 A_{n,x}}{d m^2} + \frac{m(2n-1)}{1-m^2} \frac{d A_{n,x}}{dm} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2} A_{n,x} = 0$$

ed introduciamo in luogo di m, un'altra variabile $\frac{1}{h}$. Si avrà sostituendo la trasformata

$$h^2(h^2-1) \frac{d^2 A_{n,x}}{d h^2} + h(2h^2 - (2n+1)) \frac{d A_{n,x}}{dh} - (n^2-x^2) A_{n,x} = 0$$

Facciamo adesso

$$A_{n,x} = a h^\lambda + a_1 h^{\lambda+1.2} + a_2 h^{\lambda+2.2}\, a_3 h^{\lambda+3.2} + \&c.$$

E sostituendo questa serie nella nostra trasformata si troverà λ determinato dalla Equazione

$$\lambda(\lambda-1) + (2n+1)\lambda + n^2 - x^2 = 0$$

onde si trae immediatamente

$$\lambda = \pm x - n$$

Vedremo ancora dalla sostituzione che il coefficiente costante a_s del termine $h^{\lambda+2.s}$ sarà dato dalla formula

$$a_s = \frac{\lambda\,(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+2s-1).\,a_{n,x}}{4^s.\,1.\,2.\,3\ldots s.(\lambda+n+1)\,(\lambda+n+2)\ldots(\lambda+n+s)}$$

ove $a_{n,x}$ è arbitraria, e dipendente da n, ed x.

Se prenderemo $\lambda = x - n$, otterremo

$$a_s = \frac{(x-n)\,(x-n+1)\,(x-n+2)\ldots(x-n+2s-1)}{4^s.1.2.3\ldots s.(x+1)\,(x+2)\,(x+3)\ldots(x+s)}\,.\,a_{n,x}$$

Sostituendo questo valore nella nostra serie, avremo avvertendo di porre in luogo di h il suo valore $\frac{1}{m}$

$$A_{n,x} = a_{n,x}\left\{m^{n-x} + \frac{(x-n)\,(x-n+1)}{4\cdot(x+1)}m^{n-x-2} + \frac{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)}{4^2\cdot 1\cdot 2\cdot(x+1)\,(x+2)}m^{n-x-4} + \&c.\right.$$

$$\left.\ldots\ldots + \frac{(x-n)\,(x-n+1)\ldots\ldots(x-n+2s-1)}{4^s\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots s\,(x+1)(x+2)\,(x+3)\ldots\ldots(x+s)}m^{n-x-2\cdot s} + \&c.\right\}$$

Questo valore di $A_{n,x}$ non è completo, poichè comprende una sola arbitraria $a_{n,x}$; e se si prendesse per λ l' altro suo valore, cioè se si facesse $\lambda = -x - n$, il termine generale a_s sarebbe dato dalla formula

$$a_s = \pm\frac{(x+n)\,(x+n-1)\,(x+n-2)\ldots(x+n-(2s-1))}{4^s\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots s\,(x-1)\,(x-2)\cdots(x-s)}\cdot b_{n,x}$$

ove il segno superiore conviene ad s pari, e l' inferiore ad s dispari. Ma siccome tanto x che s sono necessariamente numeri intieri, ed s cominciando dal valore o và di termine in termine accrescendosi di una unità, in qualcuno di questi termini vi sarà nel deno-

minatore il fattore $n - x$, e quindi questo termine, e tutti i successivi diverranno infiniti. Ma facilmente ci convinceremo che per il nostro oggetto l'integrale particolare ottenuto è sufficiente. Abbiamo infatti

$$A_{n,x} = \frac{2}{\pi} \int (m + \cos.\varphi)^n \cdot \cos.\, x\varphi \cdot d\varphi$$

purchè si eseguisca la integrazione tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Si ha inoltre

$$(m + \cos.\varphi)^n = m^n + n\, m^{n-1} \cos.\varphi + n\,\frac{(n-1)}{2} m^{n-2} \cdot (\cos.\varphi)^2 + \&c.$$

Moltiplicando per $\cos.\, x\varphi\, .\, d\varphi$ da ambe le parti, e quindi integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, troveremo che il valore di $\frac{2}{\pi} \int (m + \cos.\varphi)^n \cos.\, x\varphi\, .\, d\varphi$, ossia di $A_{n,x}$, è tutto composto di termini della forma

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{n(n-1)\,(n-2) \ldots\ldots (n-h+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots h} \int (\cos.\varphi)^h .\, \cos.\, x\varphi \cdot d\varphi$$

Ma h, ed x essendo numeri interi, sarà sempre, allorchè $h < x$

$$\int (\cos.\varphi)^h .\, \cos.\, x\varphi\, .\, d\varphi = 0$$

Onde è manifesto che il valore della formula $\frac{2}{\pi} \int (m + \cos.\varphi)^n . \cos.x\varphi\, .\, d\varphi$ sarà espresso da una serie della forma

$$p\, m^{n-x} + q\, m^{n-x-2} + \&c.$$

ordinata per le potenze decrescenti di m, in modo che la più elevata potenza di questa quantità sia $n - x$, il che combina con quello che ci vien dato dal nostro integrale particolare. E' dunque inutile l'occuparsi della ricerca dell'Integrale completo, poichè alla espres-

sione precedente di $A_{n,x}$ troveremmo che converrebbe aggiungere la quantità

$$c_{n,x}\,(r + v.\,log.\,m)$$

essendo v l'Integrale particolare trovato, ed r una serie della forma

$$k\ m^{x+n} + i\ m^{x+n-2} + \&c.$$

la quale espressione, come abbiamo veduto, non può esser complicata nel valore di $A_{n,x}$, ossia di $\frac{2}{\pi} \int (m + cos.\varphi)^n\, cos.\ x\,\varphi .\ d\,\varphi$, ove l'integrale è preso tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

Riprendiamo adesso il valore trovato di $A_{n,x}$

$$A_{n,x} = a_{n,x} \left\{ m^{n-x} + \frac{(x-n)(x-n+1)}{4\cdot(x+1)} m^{n-x-2} + \frac{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)}{4^2\cdot 1\cdot 2\ (x+1)\ (x+2)} m^{n-x-4} + \&c. \right.$$

$$\left. \cdots\cdots + \frac{(x-n)\ (x-n+1)\ (x-n+2)\cdots\cdots(x-n+2s-1)}{4^s\cdot 1.2.3\ldots.s\ (x+1)\ (x+2)\ (x+3)\ldots..(x+s)} m^{n-x-2s} + \&c. \right\}$$

e per determinare l'arbitraria $a_{n,x}$ conviene avvertire, che avendosi

$$A_{n,x} = \frac{2}{\pi} \int (m + cos.\ \varphi)^n\ cos.\ x\,\varphi\ .\ d\,\varphi$$

dovremo nella serie superiore giungere allo stesso resultato, o differenziandola rapporto ad m, e moltiplicando il resultato per n, oppure variando n in $n-1$. Troveremo con molta facilità, paragonando il coefficiente di m^{n-x-1}, che la quantità $a_{n,x}$ è determinata dalla equazione

$$(n+1)\ a_{n,x} = a_{n+1,x}\ \ (n-x+1)$$

e quindi integrando

$$a_{n,x} = p_x \cdot n(n-1)\ (n-2)\ldots\ldots(n-x+1)$$

Sarà dunque con queste determinazioni

$$A_{n,x} = p_x\, n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)\left\{ m^{n-x} + \frac{(x-n)(x-n+1)}{4(x+1)}\, m \quad - \quad + \&c. \right.$$

$$\left. + \frac{(x-n)(x-n+1)\dots(x-n+2s-1)}{4^s.1.2.3\dots s(x+1)(x+2)..(x+s)}\, .\, m^{n-x-2s} + \&c. \right\}$$

Si determinerà inoltre l'arbitraria p_x rammentandoci che la funzione $A_{n,x}$ deve sodisfare alla Equazione a differenze miste

$$2(x+1).\, A_{n,x+1} = \frac{d\, A_{n,x}}{dm} - \frac{d\, A_{n,x+2}}{d\, m}$$

nella quale sostituendo l'assegnato valore di $A_{n,x}$, avremo dal confronto dei coefficienti delle varie potenze di m la Equazione

$$p_x = 2(x+1).\ p_{x+1}$$

cioè, integrando

$$p_x = \frac{q}{2^{x-1}.1.2.3\dots(x-1).x}$$

ed è evidente che nel caso di $x=0$, sarà $p_0 = 2q$. Avremo pertanto

$$A_{n,x} = q.\, n\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{2^{x-1}.1.2.3\dots(x-1)\,x}\left\{ m^{n-x} + \frac{(x-n)(x-n+1)}{4.(x+1)}\, m^{n-x-2} + \&c. \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int (m+\cos.\varphi)^n.\cos.x\,\varphi.\,d\,\varphi$$

ove è chiaro, che posto $x=0$, ed $n=0$, si avrà $2q = \frac{2}{\pi}\int d\,\varphi$, integrando tra i convenuti limiti. Quindi sarà $q=1$. Finalmente avremo

$$A_{n,x} = n\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{2^{x-1}.1.2.3\dots(x-1)\,x}\, .\, m^{n-x}\left\{ 1 + \frac{(x-n)(x-n+1)}{4.(x+1)}\, m^{-2} \right.$$

$$+ \frac{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)}{4^2.1.2.(x+1)(x+2)}\, m^{-4} + \&c.$$

$$\left. + \frac{(x-n)(x-n+1)\dots(x-n+2s-1)}{4^s.1.2.3..s.(x+1)(x+2)\dots(x+s)}\, .\, m^{-2s} + \&c. \right\}$$

la quale espressione sarà composta di un limitato numero di termini, semprechè sia n un numero intiero.

Il termine generale $A_{n,x}$ della serie

$$(m+\cos.\varphi)^n = A_{n,0} + A_{n,1}\cos.\varphi + A_{n,2}\cos.2\varphi \ldots\ldots + A_{n,x}.\cos.x\varphi + \&c.$$

fù noto al sommo Euler, che il primo vi pervenne mediante la sola induzione. E quantunque il precedente sviluppo di $(m+\cos.\varphi)^n$ sia molto complicato, perchè composto di un infinito numero di termini, ciascuno dei quali è una serie infinita, pure la eminente utilità che porge per le approssimazioni dei moti celesti, e per la Teoria delle loro perturbazioni, ci compensa bastantemente della sua complicazione. Può vedersene una applicazione assai importante nella Meccanica celeste del Sig. Laplace al Cap. VI. del secondo Libro.

LIX.

Dalla generale espressione di $A_{n,x}$ si potranno ottenere varj altri resultati. Prima di tutto avendosi $A_{n,x} = \frac{2}{\pi}\int(m+\cos.\varphi)^n.\cos.x\varphi.d\varphi$ se differenzieremo rapporto ad n, e supporremo quindi $n = o$, avrassi

$$\frac{dA_{n,x}}{dn} = \frac{2}{\pi}\int(m+\cos.\varphi)^n.\cos.x\varphi.d\varphi.\log.(m+\cos.\varphi)$$

e supponendovi $n=o$, si avrà per resultato

$$\frac{2}{\pi}\int\log.(m+\cos.\varphi)^n.\cos.x\varphi.d\varphi$$

Avremo dunque il valore di questo integrale tra i soliti limiti, se differenzieremo rapporto ad n la serie ottenuta per $A_{n,x}$, e quindi supporremo $n=o$. Si eseguirà molto semplicemente questa operazione, osservando che fatta la differenziazione del primo fattore n del termine fuori delle parentesi, potremo risparmiarci le al-

tre, le quali conservando tutte il multiplo n daranno dei termini $=0$ allorchè vi supporremo $n=0$, come dobbiamo. Con questa osservazione si troverà immediatamente

$$\frac{2}{\pi}\int log.(m+cos.\varphi).cos.x\varphi.d\varphi=\pm\frac{1}{2^{x-1}}.\frac{1}{m^x}\Big\{1+\frac{x}{4}.\frac{1}{m^2}+\frac{x(x+3)}{4^2.1.2}\frac{1}{m^4}$$

$$+\frac{x(x+4)(x+5)}{4^3.1.2.3}.\frac{1}{m^6}+\frac{x(x+5)(x+6)(x+7)}{4^4.1.2.3.4}.\frac{1}{m^8}+\&c.$$

$$+\frac{x(x+s+1)(x+s+2)(x+s+3)....(x+2s-1)}{4^s.1.2.3...s}.\frac{1}{m^{2s}}+\&c.\Big\}$$

ove il segno superiore conviene ad x dispari, e l'inferiore ad x pari. Ma abbiamo fino di sul principio trovato che

$$\frac{2}{\pi}\int log.(m+cos.\varphi).cos.x\varphi.d\varphi=\pm\frac{2}{\pi}(m-\sqrt{(m^2-1)})^x$$

dove il duplice segno deve essere determinato come quì sopra; sarà pertanto, paragonando i due valori di

$$\frac{2}{\pi}\int log.(m+cos.\varphi).cos.x\varphi.d\varphi,$$

$$(m-\sqrt{(m^2-1)})^x=\frac{1}{2^x}.\frac{1}{m^x}\Big\{1+\frac{x}{4}.\frac{1}{m^2}+\frac{x(x+3)}{4^2.1.2}.\frac{1}{m^4}$$

$$+\frac{x(x+4)(x+5)}{4^3.1.2.3}.\frac{1}{m^6}+\&c.\Big\}$$

formula assai osservabile per la sua semplicità.

Differenziando da ambe le parti rapporto ad m, si avrà, dividendo per dm

$$-\frac{x(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}=-\frac{1}{2^x}.\frac{1}{m^x}\Big\{\frac{x}{m}+\frac{x(x+2)}{4}.\frac{1}{m^3}$$

$$+\frac{x(x+3)(x+4)}{4^2.1.2}\frac{1}{m^5}+\&c.\Big\}$$

e dividendo membro per membro la equazione superiore per la inferiore, si avrà, togliendo il divisore comune x, e riducendo

$$\sqrt{(m^2-1)}=\frac{1+\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{x(x+3)}{4^2.1.2}\cdot\frac{1}{m^4}+\frac{x(x+4)(x+5)}{4^3.1.2.3}\cdot\frac{1}{m^6}+\&c.}{\frac{1}{m}+\frac{(x+2)}{4}\cdot\frac{1}{m^3}+\frac{(x+3)(x+4)}{4^2.1.2}\cdot\frac{1}{m^5}+\frac{(x+4)(x+5)(x+6)}{4^3.1.2.3}\cdot\frac{1}{m^7}+\&c.}$$

ove è notabile che x è arbitrario, e può esser qualsivoglia numero intero.

LX.

Riprendiamo ora il general valore di $A_{n,x}$, che abbiamo trovato così espresso

$$A_{n,x}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{2^{x-1}.1.2.3\ldots(x-1)x}\cdot m^{n-x}\left\{1+\frac{(x-n)(x-2+1)}{4.(x+1)}\cdot\frac{1}{m^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(x-n)(x-n+1)(x-n+2)(x-n+3)}{4^2.1.2.(x+1)(x+2)}\cdot\frac{1}{m^4}+\&c.\right\}\ldots\ldots(E)$$

Questo è il termine generale della serie

$$(m+\cos.\varphi)^n=A+A_{n,1}\cos.\varphi+A_{n,2}\cos.2\varphi+\ldots+A_{n,x}\cos.x\varphi+\&c.$$

Se nel valore di $A_{n,x}$ si supponesse n negativo, quantunque intero, la serie (E) sempre anderebbe all'infinito. Pure abbiamo veduto, che nel caso di n negativo, la formula $(m+\cos.\varphi)^n$, ossia $\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^n}$ allorchè n è intero, si può sempre svolgere per i coseni degli archi multipli di φ in modo da ottenere sotto forma finita tutti i termini A, A_1, A_2, &c. della serie

$$\frac{1}{(m+\cos.\varphi)^n}=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+\&c.$$

ed abbiamo in particolare osservato, che si ha

$$A=\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}}{dm^{n-1}}$$

ove il segno superiore conviene ad n dispari, e l'inferiore ad n pari.

Prima di vedere come dal metodo usato possa sotto altra forma aversi questo valore, avvertiremo che col segno $A_{n,x}$ indicheremo il termine generale dello sviluppo per i coseni degli archi moltiplici della funzione $\frac{1}{(m+\cos\varphi)^n}$, avendo indicato col segno $A_{n,x}$ il termine generale della funzione $(m+\cos.\varphi)^n$. Con questo modo di scrivere sarà

$$A_{-n,0}=\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d\,m^{n-1}}$$

ove il segno superiore deve preferirsi se n è dispari, e l'inferiore se è pari.

Riprendiamo dunque la generale Equazione (H)

$$(H)\ldots\ldots\frac{d^2A_{n,x}}{dm^2}+\frac{m(2n-1)}{1-m^2}\,\frac{dA_{n,x}}{dm}-\frac{(n^2-x^2)}{1-m^2}A_{n,x}=0$$

e facendovi $x=0$, ed n negativo, si avrà per esprimere il valore di $A_{-n,0}$ la Equazione

$$\frac{d^2A_{-n,0}}{dm^2}+\frac{m(2n+1)}{m^2-1}\,\frac{dA_{-n,0}}{dm}+\frac{n^2}{m^2-1}A_{-n,0}=0$$

In luogo di $A_{-n,0}$ si sostituisca la quantità $\frac{y}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$, ed avremo la trasformata

$$\frac{d^2y}{dm^2}+\frac{m(3-2n)}{m^2-1}\,\frac{dy}{dm}+\frac{(n-1)^2}{m^2-1}.y=0$$

Questa Equazione, confrontata con la generale (H), ci offre una osservabile relazione. Se infatti nella Equazione (H) si farà $x=0$, e si varierà n in $n-1$, otterremo per esprimere $A_{n-1,0}$ la Equazione

$$\frac{d^2 A_{n-1,0}}{dm^2}+\frac{m(3-2n)}{m^2-1}\frac{dA_{n-1,0}}{dm}+\frac{(n-1)}{m^2-1}A_{n-1,0}=0$$

che è affatto simile alla Equazione in y. Sarà dunque generalmente

$$c\,y=A_{n-1,0}$$

essendo c una costante arbitraria, ed y, ed $A_{n-1,0}$ i completi valori che sodisfanno alle Equazioni a cui appartengono. Ma abbiamo per supposizione

$$y=(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}A_{-n,0}$$

Quindi sarà sostituendo

$$A_{n-1,0}=c(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}A_{-n,0}$$

Vedremo in appresso qual uso possa avere questa relazione; per ora riprendiamo la Equazione in y, e tentiamo d'integrarla.

LXI.

Questa Equazione in y è la seguente

$$\frac{d^2y}{dm^2}+\frac{m(3-2n)}{m^2-1}\frac{dy}{dm}+\frac{(n-1)^2}{m^2-1}y=0$$

Introduciamovi in luogo di m la variabile $\frac{1}{h}$, ed incontreremo la trasformata

$$h^2(1-h^2)\frac{d^2y}{dh^2}+h(2n-1-2h^2)\cdot\frac{dy}{dh}+(n-1)^2\cdot y=0$$

E facendovi

$$y=a_n h^\lambda+a_{1,n}h^{\lambda+2}+a_{2,n}h^{\lambda+2.2}+a_{3,n}h^{\lambda+3.2}+\&c.$$

troveremo λ determinato dalla Equazione

$$(\lambda+n-1)^2=0$$

ed il termine generale $a_{s,n}$ dato dalla formula

$$a_{s,n} = .a_n \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+2s-1)}{4^s.1.2.3\dots s(\lambda+n)(\lambda+n+1)(\lambda+n+2)\dots(\lambda+n+s-1)}$$

ossia ponendovi $\lambda = -(n-1)$

$$a_{s,n} = a_n \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n+2s-2)}{4^s.1\,2^2.3^2\dots s^2}$$

ove a_n è arbitraria, dipendente da n

Sostituendo questi valori nella Serie assegnata per y, ed avvertendo che $h = \frac{1}{m}$, sarà

$$y = a_n \left\{ m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{4} m^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2.1.2^2} m^{n-5} + \&c. \right\}$$

Questo valore di y, quantunque particolare, perchè comprende una sola arbitraria, pure al nostro oggetto è sufficiente. Per convincersene conviene osservare che il valore unico di λ dato dalla Equazione

$$(\overline{\lambda+n-1})^2 = 0$$

indica, come è noto, che nell'Integrale completo deve esser compresa una parte trascendente, e che all'integrale particolare ottenuto deve aggiungersi la quantità

$$b_n(p + q\,log.m)$$

essendo b_n una nuova arbitraria, p l'integrale particolare trovato, e q una funzione di m. Ma nel nostro caso il valore di y bisognandoci soltanto per ottenere $A_{-n,o}$ dalla Equazione

$$A_{-n,o} = \frac{y}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$$

ove $A_{-n,o} = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\varphi}{(m + cos.\varphi)^n}$ tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, conviene che questo stesso valore di y soddisfaccia alla Equazione sopra ottenuta (LX)

$$a y = A_{n-1,o}$$

ove per $A_{n-1,o}$ non già sia stato preso il completo valore dato dalla Equazione Differenziale che la rappresenta, ma bensì quello che conviene al primo termine della serie che esprime la funzione $(m + cos.\varphi)^{n-1}$ svolta per i coseni degli archi moltiplici. Ora questo valore di $A_{n-1,o}$ sappiamo che non può comprendere alcuna parte trascendente, poichè come ci è noto (LVIII), non può contenerla neppure la quantità più generale $A_{n,x}$; Quindi acciò con tali condizioni sia sodisfatta la Equazione

$$a y = A_{n-1,o}$$

è necessario assumere per y quell'integrale particolare che non comprende la trascendente

Riprendiamo dunque il trovato valore di y

$$y = a_n \left\{ m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{4} . m^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2 . 1 . 2^2} . m^{n-5} + \&c. \right\}$$

ora noi abbiamo per supposizione

$$A_{-n,o} = \frac{y}{(m^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}}}$$

Quindi sarà ancora

$$A_{-n,o} = \frac{a_n}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}} \left\{ m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{4} m^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2 . 1 . 2^2} . m^{n-5} + \&c. \right\}$$

la costante a_n si determinerà osservando al solito che

$$A_{-n,0} = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi}{(m + cos.\varphi)^n}$$

e che in conseguenza si giungerà al resultato stesso o variando nella quantità $A_{n,0}$ n in $n+1$, e moltiplicando per n oppure prendendo negativamente il differenziale di questa quantità medesima rapporto ad m. Facilmente troveremo assoggettando a questa condizione la serie trovata per $A_{-n,0}$, dal confronto dalle varie potenze di m, la Equazione

$$n a_n = n a_{n+1}$$

Cioè $a_n = q$, essendo q indipendente da n. Quindi

$$A_{-n,0} = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi}{(m+cos.\varphi)^n} = \frac{q}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}\left\{m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-1)}{4}.m^{n-3} + \&c.\right\}$$

onde facendo $n = 1$, sarà

$$\frac{1}{\pi}.\int \frac{d\varphi}{m+cos.\varphi} = \frac{q}{(m^2-1)}$$

Ma abbiamo (XVIII)

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi}{m+cos.\varphi} = \frac{1}{(m^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Quindi $q = 1$. Con questa determinazione sarà finalmente

$$A_{-n,0} = \frac{1}{(m^n-1)^{2-\frac{1}{2}}}\left\{m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{4}.m^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2.1.2^2} m^{n-5} + \&c.\right\}$$

La quale espressione terminerà sempre che sia n un numero intero. Ma in questa supposizione abbiamo

$$A_{-n,0} = \pm \frac{1}{1.2.3....(n-1)} \, \frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d m^{n-1}}$$

ove il segno superiore ha luogo se n è dispari, e l'inferiore se è pari; sostituendo dunque questo valore di $A_{-s,e}$ nella Equazione qui sopra, avremo

$$\frac{d^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d m^{n-1}} = \mp \frac{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}} \left\{ m^{n-1} + \frac{(n-2)(n-2)}{4} . m^{n-3} \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2.1.2^2.} . m^{n-5} + \&c. \right\}$$

Se da ambe le parti divideremo per $\sqrt{-1}$, si ha primieramente

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} . \frac{d^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{m\ -1}}}{d m^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-m^2}}}{d m^{n-1}}$$

ed inoltre essendo

$$(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^{2\frac{n-1}{2}} (1-m^2)^{n-\frac{1}{2}} = (\sqrt{-1})^{2n-1} (1-m^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

sarà ancora

$$\sqrt{-1} . (m^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = \mp (1-m^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

ove il segno superiore dovrà prendersi se n è dispari e l' inferiore se n è pari. Sostituendo qnesti valori nella formula

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{d^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d m^{n-1}} = \mp \frac{1.2.3\ \ldots.(n-1)}{(\sqrt{-1})(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}} \left\{ m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{4} m^{n-3} \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4^2.1.2^2.} . m^{n-5} + \&c. \right\}$$

ove per i segni convien attenersi alla regola stessa che vale nella Equazione

$$(\sqrt{-1})(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = \mp(1-m^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

noi otterremo immediatamente

$$\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}}{dm^{n-1}} = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1-m^2)^{n-\frac{1}{2}}}\left\{m^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{4}m^{n-3} + \&c.\right\}$$

Serie che Euler ottenne il primo per induzione, e che in seguito con diversi metodi Lagrange, e Laplace dimostrarono.

LXII.

Il valore di $A_{-n,0}$ si è pertanto ottenuto sotto due differenti forme, una delle quali è $\pm 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(n-1)\,\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{dm^{n-1}}$; e sicome $A_{-n,0}$ è dato dalla Equazione (LXVII)

$$\frac{d^2 A_{-n,0}}{dm^2} + \frac{m(2n-1)}{m^2-1}\,\frac{dA_{-n,0}}{dm} + \frac{n^2}{m^2-1}A_{-n,0} = 0$$

così a questa soddisfarà il valore più generale

$$A_{-n,0} = a\,\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^{-1}}}}{dm^{n-1}}$$

e conosciuto un integrale particolare di questa Equazione, ne otterremo l'integrale completo prevalendoci dei noti analitici artifizj, e lo troveremo così espresso.

$$A_{-n,o} = d^{n-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d\,m^{n-1}}\left\{a + a'\int\frac{dm}{(m^2-1)^{\frac{2n+1}{2}}\left\{d^{n-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d\,m^{n-1}}\right\}^2}\right\}$$

Resultato che sarebbe molto difficile ottenere a *priori*. Quindi apparisce che qualunque numero intero sia n, potrà sempre aversi sotto forma finita l'integrale della Equazione

$$\frac{dy^2}{dm^2} + \frac{m(2n-1)}{m^2-1}\frac{dy}{dm} + \frac{n^2}{m^2-1}y = M$$

ove M è una qualunque funzione di m.

LXIII.

Osservammo poc' anzi (LX) che tra le Funzioni $A_{n,o}$, $A_{-n,o}$ passa un rapporto assai osservabile, determinato dalla Equazione.

$$A_{n-1,o} = a\,(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}A_{-n,o}$$

purchè ciascuna della quantità $A_{n-1,o}$, $A_{-n,o}$ rappresenti il valore completo che in luogo di esse sostituito nelle respettive Equazioni differenziali a cui appartengono le riduca identiche. Abbiamo quì sopra trovato.

$$A_{-n,o} = d^{n-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d\,m^{n-1}}\left\{a + a'\int\frac{d\,m}{(m^2-1)^{\frac{2n+1}{2}}\left\{d^{n-1}\frac{\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d\,m^{n-1}}\right\}}\right\}$$

E sostituendo questo valore nella Equazione

$$A_{n-1,0} = a\,(m^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}}\,A_{-n,0}$$

si avrà

$$A_{n-1,0} = (m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d\,m^{n-1}}\left\{c + c'\int\frac{d\,m}{(m^2-1)^{\frac{2n+1}{2}}\left\{\frac{d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}}{d\,m^{n-1}}\right\}^2}\right\}$$

formula che rappresenterà il completo integrale della Equazione

$$\frac{d^2 A_{n-1,0}}{d\,m^2} + \frac{m\,(3-2n)}{m^2-1}\;\frac{d\,A_{n-1,0}}{d\,m} + \frac{(n-1)^2}{m^2-1}\;A_{n-1,0} = 0$$

LXIV.

Le due Equazioni quì sopra trattate non sono che casi particolari della generale Equazione (H)

$$(\text{H})\ldots\ldots\ \frac{d^2 A_{n,x}}{d\,m^2} + \frac{m\,(2n-1)}{1-m^2}\;\frac{d\,A_{n,x}}{d\,m} + \frac{(n^2-x^2)}{m-1^2}\;A_{n,x} = 0$$

Ed ambedue si sono da questa dedotte supponendovi $x = o$; e nella prima n negativo, ed n positivo per la seconda. Ma la Equazione (H) è anch' essa capace di una Evoluzione generale, ed è suscettibile di un integrale completo, come abbiamo veduto succedere nei di lei casi particolari quì sopra assegnati. Per convincersene, osserveremo in primo luogo che la funzione $A_{n,x}$ essendo il termine generale dello sviluppo di $(m + cos.\,\varphi)^n$ per i coseni degli archi multipli, si ha

$$A_{n,x} = \frac{2}{\pi}\int (m + cos.\,\varphi)^n\;cos.\;x\,\varphi\;.\;d\,\varphi$$

Se adesso supporremo n intero, e negativo, abbiamo

$$A_{-n,x} = \pm \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)} \frac{d^{n-1}\dfrac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{d\,m^{n-1}}$$

come fino di sul principio si è veduto ottenersi dalle successive differenziazioni della Equazione

$$\frac{1}{m+\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(m^2-1)}}\left(1-2\,(m-\sqrt{(m^2-1)})\cos.\varphi+2\,(m-\sqrt{(m^2-1)})^2\cos.2\varphi - \&c.\right)$$

Facciamo dunque nella generale Equazione (H) n negativo ed otterremo

$$\frac{d^2 A_{-n,x}}{d\,m^2} + \frac{m\,(2\,n+1)}{m^2-1}\;\frac{d\,A_{-n,x}}{d\,m} + \frac{(n^2-x^2)}{m^2-1}A_{-n,x} = 0$$

alla quale soddisfarà in conseguenza anche il valore più generale

$$A_{-} \quad = a\;\frac{d^{n-1}\dfrac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1\,)}}}{d\,m^{n-1}}$$

E da questo integrale particolare dedurremo col solito metodo l'integrale completo, che sarà

$$A_{-n,x} = \frac{d^{n-1}\dfrac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{d\,m^{n-1}}\left\{c + c'\int\frac{d\,m}{(m^2-1)^{\frac{2n+1}{2}}\left\{\dfrac{d^{n-1}\dfrac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}}{d\,m^{n-1}}\right\}^2}\right\}$$

Ed osservando che si ha

$$\frac{d\,(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{d\,m} = -\,x\,\frac{(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{\sqrt{(m^2-1)}}$$

otterremo, mutate le costanti

$$A_{-n,x} = \frac{d^n (m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{d m^n} \left\{ c + c' \int \frac{d m}{(m^2-1)^{\frac{2n+1}{2}} \left\{ \frac{d^n (m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{d m^n} \right\}^2} \right\}$$

LXV.

Pertanto la Equazione generale (H) è suscettibile di un integrale completo, e finito nel caso di n negativo. Se fosse n positivo, se ne otterrebbe parimente il completo Integrale, deducendolo dal caso precedente; ed appunto come il valore di $A_{n,0}$ si è dedotto dal valore di $A_{-n,0}$, così esprimeremo la funzione di $A_{n,x}$ per mezzo della funzione $A_{-n,x}$. Per dimostrar ciò, riprendiamo la Equazione (H)

$$\text{(H)} \qquad \frac{d^2 A_{n,x}}{d m^2} + m \frac{(2n-1)}{1-m^2} \frac{d A_{n,x}}{d m} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2} A_{n,x} = 0$$

Cambiandovi n in $-n$, sarà $A_{-n,x}$ determinato dalla Equazione

$$\frac{d^2 A_{-n,x}}{d m^2} + m \frac{(2n+1)}{m^2-1} \frac{d A_{-n,x}}{d m} + \frac{(n^2-x^2)}{m^2-1} A_{-n,x} = 0$$

Ponghiamo adesso

$$A_{-n,x} = \frac{y}{(m^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$$

ed avremo la trasformata

$$\frac{d^2 y}{d m^2} + \frac{(3-2n)m}{m^2-1} \cdot \frac{d y}{d m} + \frac{(n-1)^2 - x^2}{m^2-1} y = 0$$

che è affatto simile alla proposta (H), ove in luogo di n è stato sostituito $n-1$. Quindi generalmente avremo

$$A_{n-1,x} = a\,y$$

Ma si ha

$$y = (m^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} A_{-n,x}$$

cioè, eliminando y tra queste due Equazioni

$$A_{n-1,x} = a\,(m^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} A_{-n,x}$$

Quindi cambiando n in $n+1$, avremo

$$A_{n,x} = a'\,(m^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}} A_{-(n+1),x}$$

Abbiamo quì sopra(LXIV) ottenuto il completo valore di $A_{-n,x}$; cambiandovi n in $n+1$, e sostituendo il resultato in questa Equazione, si avrà

$$A_{n,x} = (m^2-1)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^{n+1}(m-\sqrt{m^2-1})^x}{d\,m^{n+1}} \left\{ c + c' \int \frac{d\,m}{(m^2-1)^{\frac{2n+3}{2}} \left\{ \frac{d^{n+1}(m-\sqrt{(m^2-1)})^x}{d\,m^{n+1}} \right\}^2} \right\}$$

che sarà il completo integrale della Equazione (H) nel caso di n intero, e positivo.

LXVI.

Se fosse proposta dunque la Equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{d\,m^2} + \frac{m\,(2\,n-1)}{1-m^2}\,\frac{d\,y}{d\,m} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2}\,y = M$$

ove M è una funzione qualunque di m, coi metodi precedenti se ne otterrebbe sempre l' integrale completo, purchè sia x un nume-

ro intero positivo, e n parimente intero, positivo, o negativo, poichè è noto che nelle Equazioni Lineari l' esistenza di un termine indipendente da y non accresce la difficoltà della integrazione. I resultati ai quali siamo pervenuti, oltre ad esser difficilissimi a dimostrarsi a priori offrono una singolarità molto osservabile, ed è di presentare nell' integrale di una Equazione differenziale una delle costanti in questa contenuta, come esponente di differenziazione. Se nella Equazione

$$\frac{d^2 y}{d m^2} + \frac{m(2n-1)}{1-m^2} \frac{dy}{dm} - \frac{(n^2-x^2)}{1-m^2} y = \mathrm{M}$$

introdurremo in luogo di m la variabile $\frac{1}{\sqrt{h}}$, avremo la trasformata

$$(\mathrm{V}) \ldots 4h^2(h-1)\frac{d^2 y}{d h^2} + h(6h-4(n+1))\frac{dy}{dh} + (x^2-n^2)y = \mathrm{H}$$

essendo H funzione di h; e questa Equazione ammetterà un integrale finito se n, ed x saranno numeri interi. La Equazione (V) è un caso particolare della Equazione

$$z^2(a+bz^k)\frac{d^2 y}{dz^2} + z(c+ez^k)\frac{dy}{dz} + (f+gz^k)y = \mathrm{Z}$$

la quale, posto $z^k = s$ si riduce alla più semplice forma

$$s^2(a+bs)\frac{d^2 y}{ds^2} + s(c'+e's)\frac{dy}{ds} + (f'+g's)y = \mathrm{S}$$

Di questa Equazione molto si sono occupati Euler, Pfaff, ed altri Geometri per sviluppare i casi in cui ammette un integrale finito;

e le cose precedenti aggiungono ai già conosciuti, dei casi d'integrabilità assai estesi.

Anche la equazione

$$(g m^2 + b)\frac{d^2 y}{dm^2} + k m \frac{dy}{dm} + c y = M$$

o la sua Equivalente

$$(g' m^2 - 1)\frac{d^2 y}{dm^2} + k' m \frac{dy}{dm} + c' y = M'$$

ove $g' = -\frac{g}{b}$, $k' = -\frac{k}{b}$, $c' = -\frac{c}{b}$, $M' = -\frac{M}{b}$, si può ridurre alla forma della Equazione (V). Introducendovi infatti la variabile $\frac{a}{h}$ in luogo di m, avremo facendo $a^2 g' = 1$

$$h^2(h^2 - 1)\frac{d^2 y}{dh^2} + \left\{2 h^2 - \left(2 - \frac{k'}{g'}\right)\right\}\frac{dy}{dh} - c' y = H$$

che è ridotta alla forma (V). Potremo assai moltiplicare queste riduzioni, ma quì non ci tratterremo davvantaggio sopra tale oggetto.

LXVII.

La Equazione differenziale (H) esprime il termine generale della funzione $(m + cos.\varphi)^n$ svolta in serie per i coseni degli archi multipli; E così come ci siamo contenuti in questa ricerca, abbiamo in maniera analoga operato sviluppando in una serie della indole medesima le funzioni $log.(m + cos.\varphi)$, &c. le quali tutte si comprendono sotto la forma generale $F(m + cos.\varphi)$, e individualmente per ciascuna ab-

biamo ottenuta una Equazione differenziale, dalla quale abbiamo dedotta la natura del termine generale A_x della serie

$$A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi \ldots\ldots + A_x \cos. x\varphi + \ldots\ldots$$

Proponghiamoci adesso il seguente problema. Data la funzione $F(m+\cos.\varphi)$, determinare generalmente la natura della funzione F, acciocchè sviluppando $F(m+\cos.\varphi)$ in serie procedente per i coseni degli archi multipli in modo che sia

$$F(m+\cos.\varphi) = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + \ldots\ldots + A_x \cos. x\varphi + \ldots$$

possa il termine generale A_x esser rappresentato da una Equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Supponghiamo a tale oggetto

$$z = F(m+\cos.\varphi)$$

ed avremo

$$\left(\frac{dz}{dm}\right) = F'(m+\cos.\varphi)$$

$$\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right) = F''(m+\cos.\varphi)$$

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) = F'(m+\cos.\varphi) - (\cos.\varphi^2) F''(m+\cos.\varphi) - \cos.\varphi \,.\, F'(m+\cos.\varphi)$$

moltiplicando la terza equazione per P, la seconda per Q, la prima per R, essendo P, Q, R funzioni di m indeterminate, ed aggiungendo la loro somma alla quarta, avremo, chiamando F per maggior semplicità la funzione $F(m+\cos.\varphi)$,

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) + P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + R z$$

$$= F'' - (\cos.\varphi)^2 F'' + P F'' + Q F' + R F - \cos.\varphi\, F' \ldots\ldots (K)$$

Abbiamo ora per il Teorema di Taylor

$$F(m+\cos.\varphi)=Fm+\cos.\varphi\, F'm+\frac{\cos.^2\varphi}{2}F''m+\&c.$$

onde avremo, sostituendo nel secondo membro della Equazione (K) dopo semplici riduzioni

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz$$

$$=(P+1)F''m+(P+1)F'''m\cos.\varphi+\frac{(P+1)}{2}F^{iv}m\,.\cos.^2\varphi$$
$$+\frac{(P+1)}{2.3}F^{v}m\,.\cos.^3\varphi+\ldots+\frac{P+1}{2.3\ldots x}F^{(x+2)}m\,.\cos.^x\varphi+\ldots$$

$$+QF'm+QF''m\,.\cos.\varphi+\frac{QF'''m}{2}\,.\cos.^2\varphi$$
$$+\frac{QF^{iv}m}{2.3}\,.\cos.^3\varphi+\ldots+\frac{Q}{2.3..x}F^{(x+1)}m\,.\cos.^x\varphi+\ldots$$

$$+RFm+(R-1)F'm\,.\cos\varphi+\frac{(R-2^2)}{2}F''m\,.\cos.^2\varphi$$
$$+\frac{(R-3^2)}{2.3}F'''m\,.\cos.^3\varphi+\ldots+\frac{R-x^2}{2.3..x}F^{(x)}m\cos.^x\varphi+\ldots$$

Se ora, qualunque sia x, faremo

$$(P+1)F^{(x+2)}m+QF^{(x+1)}m+(R-x^2)F^{(x)}m=0$$

svanirà il secondo membro della Equazione superiore, ed avremo

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0$$

alla quale equazione lineare a differenze parziali soddisfarà

$$z=F(m+\cos.\varphi)$$

purchè sia Fm in modo determinato che si abbia

$$(P+1)\frac{d^{(x+2)}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{(x+1)}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0$$

Facendo $y=\dfrac{d^x Fm}{dm^x}$, sarà $Fm=\int^x y\,dm^x$, ed y dipenderà dalla Equazione lineare

$$(P+1)\frac{d^2y}{dm^2}+Q\frac{dy}{dm}+(R-x^2)y=0$$

Integrando questa Equazione avremo il valore di y che sostituito nella formula

$$Fm=\int^x y\,dm^x$$

ci darà Fm con $x+2$ costanti arbitrarie. Quì conviene avvertire che il valore di Fm così ottenuto conterrà nella sua espressione la costante x; ma dovendo esserne Fm indipendente, converrà in modo determinar le costanti che la x non vi apparisca, poichè la Equazione (R) deve esser sodisfatta indipendentemente da x.

LXVIII.

Questa osservazione ci condurrà alla soluzione del nostro problema. Data la funzione $F(m+\cos.\varphi)$, se dovrà soddisfare ad una Equazione a differenze parziali della forma

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0$$

conviene che la funzione Fm soddisfaccia indipendentemente da x alla Equazione (R)

$$(R)\ldots\ldots(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}.Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0$$

e se potremo determinare P, Q, R in modo che una tal condizione sia verificata, facendo

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots$$

potremo sostituire questo valore nella Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) + P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + Rz = 0$$

ed eseguita la operazione, troveremo che A_x dipenderà dalla Equazione lineare del 2.° ordine

$$P\,\frac{d^2A_x}{dm^2} + Q\,\frac{dA_x}{dm} + (R - x^2)A_x = 0$$

Sia proposta per esempio la funzione

$$z = (m + \cos.\varphi)^n$$

avremo $Fm = m^n$; sostituendo questo valore nella Equazione (R), sarà

$$\frac{P+1}{m^2}(n-x)(n-x-1) + \frac{Q}{m}(n-x) + R - x^2 = 0$$

che può verificarsi indipendentemente da x purchè le funzioni P, Q, R soddisfacciano alle condizioni

$$\frac{P+1}{m^2}\,n\,(n-1) + \frac{Qn}{m} + R = 0$$

$$(1-2n)\,\frac{P+1}{m^2} - \frac{Q}{m} = 0$$

$$\frac{P+1}{m^2} - 1 = 0$$

onde ricaveremo

$$P = m^2 - 1$$

$$Q = (1-2n)\,m$$

$$R = n^2$$

E sostituendo questi valori nella Equazione

$$P\frac{d^2 A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0$$

troveremo che il termine generale A_x dello sviluppo di $(m+cos.\varphi)^n$ per i coseni degli archi moltiplici sarà rappresentato dalla Equazione

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2}+m\frac{(2n-1)}{1-m^2}\frac{dA_x}{dm}-\frac{(n^2-x^2)}{1-m^2}A_x=0$$

come abbiamo già ritrovato (LXII).

LXIX.

Viceversa, se sia proposta la Equazione

$$P\frac{d^2 A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0$$

dove siano P, Q, R funzioni comunque di m, ed x un numero intiero, acciò essa ammetta un integrale particolare della forma

$$A_x=\int F(m+cos.\varphi)\,cos.x\varphi\,d\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$; converrà che Fm soddisfaccia qualunque sia x alla Equazione (R)

$$(R)\ldots\ldots(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0.$$

Per dedurre il valore di Fm, incominceremo dal ridurla più semplice, dividendola per $P+1$, e fatto $\frac{Q}{P+1}=H$, $\frac{R}{P+1}=K$,

$\frac{1}{P+1} = L$, la nostra Equazione (R) prenderà la forma

$$\frac{d^{x+2} Fm}{dm^{x+2}} + H \frac{d^{x+1} Fm}{dm^{x+1}} + \left\{ K - L\, x^2 \right\} \frac{d^x Fm}{dm^x} = 0$$

Questa Equazione deve aver luogo qualunque numero intero, e positivo sia x; se dunque varieremo x in $x+1$, avremo la Equazione

$$\frac{d^{x+3} Fm}{dm^{x+3}} + H \frac{d^{x+2} Fm}{dm^{x+2}} + \left\{ K - L\,(x+1)^2 \right\} \frac{d^{x+1} Fm}{dm^{x+1}} = 0$$

Ma differenziandola rapporto ad m avremo ancora

$$\frac{d^{x+3} Fm}{dm^{x+3}} + H \frac{d^{x+2} Fm}{dm^{x+2}} + \left\{ \frac{dH}{dm} + K - L\, x^2 \right\} \frac{d^{x+1} Fm}{dm^{x+1}}$$

$$+ \left\{ \frac{dK}{dm} - x^2 \frac{dL}{dm} \right\} \frac{d^x Fm}{dm^x} = 0$$

E sottraendo l'una dall'altra, otterremo

$$\frac{d^{x+1} Fm}{dm^{x+1}} - \frac{\left\{ x^2 \frac{dL}{dm} - \frac{dK}{dm} \right\}}{\frac{dH}{dm} + (2x+1) L} \frac{d^x Fm}{dm^x} = 0$$

E quindi

$$\frac{d^x Fm}{dm^x} = C\, e^{\int \frac{x^2 \frac{dL}{dm} - \frac{dK}{dm}}{\frac{dH}{dm} + (2x+1) L} dm}$$

Da questa formula otterremo integrando il valore di Fm con $x+1$ contanti arbitrarie, le quali se sarà possibile in modo determinare

che F m indipendentemente da x sodisfaccia alla Equazione

$$(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^{x}Fm}{dm^{x}}=0$$

avremo allora

$$A_x=\int F(m+\cos.\varphi)\,d\varphi\cdot\cos.\,x\varphi$$

che soddifarà alla Equazione

$$P\frac{d^2A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0$$

purchè l'integrale sia preso tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$.

LXX.

Abbiamo osservato (LXVIII) che se nella Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0$$

si sostituirà in luogo di z la serie

$$z=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+A_3\cos.3\varphi+\ldots+A_x\cos.x\varphi+\&c.$$

otterremo, sodisfacendovi indipendentemente dai coseni degli archi moltiplici la Equazione differenziale

$$P\frac{d^2A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0$$

la quale determinerà il termine generale A_x della serie che esprime il valore di z. Questo valore essendo determinato da una Equazione lineare del secondo ordine, sarà generalmente della forma $A_x = c_x \, \delta_x + c'_x \cdot \gamma_x$, ove c_x, c'_x sono costanti arbitrarie. dipendenti da x, e δ_x, γ_x sono funzioni di m, ed x. Sostituendo questo valore di A_x nella serie

$$z = A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2\varphi + A_3 \cos. 3\varphi + \&c.$$

noi avremo un' integrale della Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + P\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + Rz = 0$$

con una infinità di costanti arbitrarie.

LXXI.

Ma per giudicare della generalità di questa soluzione, riprendiamo a considerare la Equazione

$$P\frac{d^2 A_x}{dm^2} + Q\frac{dA_x}{dm} + (R - x^2)A_x = 0$$

Facciamovi $A_x = q_x . p^x$, ove sia q_x funzione di m, ed x, e p funzione solamente di m. Noi avremo

$$\frac{dA_x}{dm} = p^x \frac{dq_x}{dm} + x p^{x-1} q_x \frac{dp}{dm}$$

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2} = p^x \frac{d^2 q_x}{dm^2} + 2x p^{x-1} \frac{dp}{dm} . \frac{dq_x}{dm} + x(x-1) p^{x-2} . q_x . \frac{dp^2}{dm^2} .$$
$$+ x p^{x-1} q_x . \frac{d^2 p}{dm^2}$$

Sostituendo quindi nella nostra Equazione, avremo la trasformata

$$p^x . P \frac{d^2 q_x}{dm^2} + \left(2 x p^{x-1} \frac{dp}{dm} . P + Q\, p^x\right) \frac{dq_x}{dm} + P . x^2 . p^{x-2} . q_x \frac{dp^2}{dm^2} + (R - x^2) p^x . q_x$$

$$+ x q_x \left\{ Q p^{x-1} \frac{dp}{dm} - P p^{x-2} \frac{dp^2}{dm^2} + P p^{x-1} \frac{d^2 p}{dm^2} = 0 \right\}$$

Facciamo per sodisfarvi

$$P p \frac{d^2 q}{dm^2} + \left(2 x \frac{dp}{dm} . P + Q p\right) \frac{dq}{dm} + \left\{ P x^2 \frac{dp^2}{dm^2} + (R - x^2) p^2 \right\} q = 0$$

$$Q p \frac{dp}{dm} - P \frac{dp^2}{dm^2} + P p \frac{d^2 p}{dm^2} = 0$$

Supponghiamo adesso che da questa seconda Equazione si abbiano due valori particolari di p, che chiameremo u, s, e dalla prima si siano parimente ottenuti due valori particolari di q_x, che suppongo h_x, k_x; egli è chiaro che avendosi $A_x = q_x p^x$, sarà il valore completo di A_x

$$A_x = c_x h_x . u^x + c'_x . k_x . s^x$$

essendo c_x, c'_x due costanti arbitrarie. Sostituendo questo valore nella serie

$$z = A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2\varphi + A_3 \cos. 3\varphi + \&c.$$

noi avremo

$$z = c_0 . h_0 + c_1 h_1 . u . \cos. \varphi + c_2 h_2 u^2 . \cos. 2\varphi + c_3 . h_3 . u^3 \cos. 3\varphi + \&c.$$

$$+ c'_0 k_0 + c'_1 k_1 . s \cos \varphi + c'_2 . k_2 s^2 . \cos. 2\varphi + c'_3 . k_3 . s^3 . \cos. 3\varphi + \&c.$$

Espressione che soddisfarà alla Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + P \left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + Q \left(\frac{dz}{dm}\right) + R\, z = c$$

LXXII.

Consideriamo adesso la serie

$$E = c_0 h_0 + c_1 h_1 . u . \cos. \varphi + c_2 h_2 . u^2 . \cos. 2\varphi + c_3 h_3 u^3 . \cos. 3\varphi + \&c.$$

svolgendo i coseni degli archi moltiplici per le potenze dell' a rco, ed ordinando il resultato per le potenze di φ, avremo

$$\begin{aligned} E = & c_0 . h_0 + c_1 . h_1 . u + c_2 h_2 . u^2 + c_3 h_3 u^3 + \&c. \\ & - \frac{\varphi^2}{2} \left\{ c_1 h_1 u + 2^2 . c_2 h_2 . u^2 + 3^2 . c_3 h_3 u^3 + \&c. \right\} \\ & \frac{+\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ c_1 h_1 u + 2^4 . c_2 . h_2 . u^2 + 3^4 . c_3 h_3 . u^3 + \&c. \right\} \\ & - \&c. \end{aligned}$$

Supponghiamo ora che con qualsivoglia metodo siasi trovata la somma Σ_u della serie

$$\Sigma_u = c_0 h_0 + c_1 h_1 u + c_2 . h_2 . u^2 + c_3 h_3 u^3 + \&c.$$

noi avremo anche

$$c_1 h_1 u + 2^2 c_2 h_2 u^2 + 3^2 c_3 h_3 u^3 + \&c. = \frac{udud\Sigma_u}{du^2}$$

$$c_1 h_1 u + 2^4 c_2 h_2 u^2 + 3^4 c_3 h_3 u^3 + \&c. = \frac{udududud\Sigma_u}{du^4}$$

&c.

Sostituendo questi valori nella espressione di E ordinata per le potenze di φ, avremo

$$E = \Sigma_u - \frac{\varphi^2}{2} \frac{udud\Sigma_u}{du^2} + \frac{\varphi^4}{2 \cdot 3 . 4} \frac{udududud\Sigma_u}{du^4} - \&c.$$

Se adesso prenderemo a considerare l' altra serie

$$E' = c'_0 k_0 + c'_1 k_1 . s . \cos. \varphi + c'_2 k_2 s_2 \cos. 2 \varphi + \&c.$$

noi potremo effettuarvi le stesse trasformazioni. E facilmente si vedrà che facendo

$$\Psi_s = c'_0 k_0 + c'_1 k_1 . s + c'_2 k_2 s^2 + c'_3 k_3 s^3 + \ldots$$

noi avremo

$$E' = \Psi_s - \frac{\varphi^2}{2} \frac{s d s d}{d s_2} \Psi_s + \frac{\varphi^4}{2.3.4} \frac{sdsdsdsd}{d s^4} \Psi_s - \&c.$$

Abbiamo veduto che alla Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + P \left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + Q \left(\frac{d z}{dm}\right) + R z = o$$

si sodisfà mediante il valore di z

$$z = c_0 h_0 + c_1 h_1 u . \cos. \varphi + c_2 h_2 . u^2 \cos. 2 \varphi + \&c.$$

$$+ c'_0 k_0 + c'_1 k_1 s . \cos. \varphi + c'_2 k_2 . s^2 \cos. 2 \varphi + \&c.$$

ossia mediante il valore

$$z = E + E'$$

Quindi sostituendo per E, ed E' le espressioni trovate, si avrà

$$z = \Sigma_u - \frac{\varphi^2}{2} \frac{udud}{du^2} \Sigma_u + \frac{\varphi^4}{2.3.4} \frac{udududud}{d u^4} \Sigma_u - \&c.$$

$$+ \Psi_s - \frac{\varphi^2}{2} \frac{sdsd}{ds^2} \Psi_s + \frac{\varphi^4}{2.3.4} \frac{sdsdsdsd}{d s_4} \Psi_s - \&c.$$

LXXIII.

Tutto pertanto consisterà nel ritrovare i valori di Σ_u, e di Ψ_s, ossia nel sommare generalmente una serie della forma

$$c_0 h_0 + c_1 h_1 u + c_2 h_2 u^2 + c_3 h_3 u^3 + \&c.$$

nella qual ricerca il Teorema di Parseval che abbiamo precedentemente dimostrato, e generalizzato può spesso esserci utilissimo. Resulta infatti la nostra serie dalla somma dei prodotti dei coefficienti di y nelle due serie

$$c_0 + c_1 u y + c_2 u^2 y^2 + c_3 u^3 y^3 + c_4 u^4 y^4 + \&c.$$

$$h_0 + h_1 y + h_2 y^2 + h_3 y^3 + h_4 y^4 + \ldots$$

La prima di esse, a cagione delle infinite arbitrarie rappresenta un'arbitraria funzione di $p\, y$, che chiameremo $F\, p y$; ed ottenuta la somma della seconda serie, la quale sarà una funzione determinata di m, ed y, è chiaro che nella espressione della quantità

$$\Sigma_u = c_0 h_0 + c_1 h_1 u + c_2 h_2 u^2 + \&c.$$

sempre sarà compresa una funzione arbitraria di u. Lo stesso deve dirsi per la funzione Ψ_s

LXXIV.

Riprendiamo attualmente la espressione di z precedentemente trovata

$$z = \Sigma_u - \frac{\phi^2}{2} \frac{udud}{du^2} \Sigma_u + \frac{\phi^4}{2.3.4} \frac{udududud}{du^4} \Sigma_u \quad \&c.$$

$$+ \Psi_s - \frac{\phi^2}{2} \frac{sdsd}{ds^2} \Psi_s + \frac{\phi^4}{2.3.4} \frac{sdsdsdsd}{ds^4} \Psi_s \quad - \&c.$$

noi abbiamo veduto, artic. (LIV) che posto $u = {}^{y}$, si ha sempre

$$\frac{ududu\ldots\ldots}{du^n}\, d\,\Sigma_u = \frac{d^n}{dy^n}\,\Sigma_\iota^y$$

Quindi la prima linea del valore di z potrà mettersi sotto la forma

$$\Sigma_\iota^y - \frac{\varphi^2}{2}\,\frac{d^2\,\Sigma_\iota^y}{dy^2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4}\,\frac{d^4\,\Sigma_\iota^y}{dy^4} - \&c.$$

cioè facendo $\Sigma_\iota^y = \mathrm{P}_y$

$$\mathrm{P}_y - \frac{\varphi^2}{2}\,\frac{d^2\,\mathrm{P}_y}{dy^2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4}\,\frac{d^4\,\mathrm{P}_y}{dy^4} - \&c.$$

serie che rappresenta lo sviluppo della funzione

$$\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{P}_{y+\varphi\sqrt{-1}} + \mathrm{P}_{y-\varphi\sqrt{1}}\right\}$$

Ma essendo $u = e^y$, la prima linea del valore di z sarà rappresentata dalla formula

$$\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{P}_{log.\,u+\varphi\sqrt{-1}} + \mathrm{P}_{log.\,u-\varphi\sqrt{-1}}\right\}$$

E similmente per la seconda linea troveremo

$$\tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Q}_{log.\,s+\varphi\sqrt{-1}} + \mathrm{Q}_{log.\,s-\varphi\sqrt{-1}}\right\}$$

essendo Q in modo determinato, che facendo $s = e^y$, si abbia $\Psi_\iota^y = \mathrm{Q}_y$

In tal maniera il valore di z potrà più concisamente essere espresso dalla formula

$$z = \mathrm{P}_{log.u+\varphi\sqrt{-1}} + \mathrm{P}_{log.u-\varphi\sqrt{-1}} + \mathrm{Q}_{log.s+\varphi\sqrt{-1}} + \mathrm{Q}_{log.s-\varphi\sqrt{-1}}.$$

LXXV.

Ma per ottenere sotto forma finita l'integrale della Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) + P\left(\frac{d^2 z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + Rz = 0$$

si può anche tenere una più semplice strada. Abbiamo infatti veduto (LXXVII) che ad essa soddisfà la serie

$$z = c_0 h_0 + c_1 h_1 . u . \cos. \varphi + c_2 h_2 . u^2 . \cos. 2\varphi + \&c.$$

$$+ c'_0 k_0 + c'_1 k_1 . s . \cos. \varphi + c'_2 . k_2 . s^2 . \cos. 2\varphi + \&c.$$

Supponghiamo ora di aver trovata la somma R_y della serie

$$R_y = c_0 h_0 + c_1 h_1 . u . y + c_2 h_2 u^2 . y^2 + c_3 h_3 u^3 . y_3 + \ldots.$$

Egli è chiaro che avremo

$$\frac{1}{2}\left\{R_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + R_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}\right\} = c_0 h_0 + c_1 h_1 u . \cos\varphi + c_2 h_2 u^2 \cos. 2\varphi + \&c.$$

e similmente se chiameremo R'_y la somma della serie

$$R'_y = c'_0 k_0 + c'_1 k_1 \cdot s \cdot y + c'_2 \cdot k_2 \cdot s^2 \cdot y^2 + \&c.$$

noi avremo anche

$$\frac{1}{2}\left\{R'_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + R'_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}\right\} = c'_0 k_0 + c'_1 k_1 s \cdot \cos.\varphi + c'_2 k_2 \cdot s^2 \cos. 2\varphi + \&c.$$

Quindi sostituendo questi valori nella precedente espressione di z, sarà

$$z = \frac{1}{2}\left\{R_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + R_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}} + R'_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + R'_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}\right\}$$

LXXVI.

La funzione R_y rappresenta la somma della serie

$$c_0 h_0 + c_1 h_1 u y + c_2 h_2 u^2 y^2 + \&c.$$

ed a motivo delle infinite arbitrarie c_0, c_1, c_2, &c. nella di lei espressione può supporsi (LXXIII) complicata una funzione arbitraria di uy. Chiamandola $F \cdot uy$, nelle quantità $\frac{R}{e^{\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{R}{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$, verranno comprese le funzioni arbitrarie $F u e^{\phi\sqrt{-1}}$, $F u e^{-\phi\sqrt{-1}}$; ed è chiaro che sostituendo nella proposta Equazione a differenze parziali in luogo di z la quantità

$$z = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{e^{\phi\sqrt{-1}}} + \frac{R}{e^{-\phi\sqrt{-1}}}\right\}$$

tra le funzioni arbitrarie $F u e^{\phi\sqrt{-1}}$, $F u e^{-\phi\sqrt{-1}}$ non si potrà eseguire nessuna riduzione a motivo del multiplo differente di u. Quindi quelle funzioni potranno tutte supporsi differenti, ed alla proposta sodisfaranno parzialmente le quantità $\frac{R}{e^{\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{R}{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{R'}{e^{\phi\sqrt{-1}}}$, $\frac{R'}{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$.

Quindi apparisce che il completo valore di z si otterrà ancora nel caso in cui non potremo conoscere la quantità R'_y, cioè la somma della serie

$$c'_0 k_0 + c'_1 k_1 s \cdot y + c'_2 k_2 s^2 \cdot y^2 + \&c.$$

poichè dalla cognizione del solo valore di R_y si ha la maniera di

introdurre nella espressione di z due funzioni arbitrarie, quali convengono acciò sia completo l' integrale di una Equazione a parziali differenze del secondo ordine.

LXXVII.

Per vedere una applicazione di questo metodo, prendiamo a considerare la Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d \varphi^2}\right) + (m^2 - 1)\left(\frac{d z}{d m^2}\right) + m(1 - 2n)\left(\frac{d z}{d m}\right) + n^2 z = 0$$

ove sia n un numero intiero e positivo. Facendovi

$$z = A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2\varphi + A_3 \cos. 3\varphi + \&c.$$

troveremo A_x determinato dalla Equazione

$$\frac{d^2 A_x}{dm^2} + \frac{m(2n-1)}{1-m^2}\frac{d A_x}{d m} - \frac{(n^2 - x^2)}{1 - m^2} A_x = 0$$

dalla quale avremo per A_x un integrale particolare così espresse (LXV)

$$A_x = (m^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}} c_x \cdot \frac{d^{n+1} p^x}{d m^{n+1}}$$

essendo $p = m - \sqrt{(m^2 - 1)}$. Sostituendo questo valore nella serie proposta, si avrà

$$z = (m^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^{n+1}}{dm^{n+1}} \left\{c_1 p \cos. \varphi + c_2 p^2 \cos. 2\varphi + c_3 p^3 \cos. 3\varphi + \&c.\right\}$$

La serie compresa tra le parentesi equivale a $Fp\, e^{\varphi\sqrt{-1}} + Fp\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}$,

essendo F una funzione arbitraria; quindi sostituendo, avremo

$$z=(m^2-1)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^{n+1}}{d\,m^{n+1}}\left\{\mathrm{F}pe^{\phi\sqrt{-1}}+\mathrm{F}pe^{-\phi\sqrt{-1}}\right\}$$

ove, come sappiamo (LXXVI), possiamo supporre diverse le due funzioni arbitrarie. Essendo inoltre $p=m-\sqrt{(m^2-1)}=\frac{1}{m+\sqrt{(m^2-1)}}$, sarà ancora, mutando le caratteristiche delle funzioni,

$$z=(m^2-1)^{n+\frac{1}{2}}\,d^{n+1}\left\{\frac{\mathrm{F}(m+\sqrt{(m^2-1)})e^{\phi\sqrt{-1}}+\Psi\,(m-\sqrt{(m^2-1)})\,e^{\phi\sqrt{-1}}}{d\,m^{n+1}}\right\}$$

E questo rappresenterà il completo integrale della proposta. L' applicazione di questo metodo non essendo di veruna difficoltà non ci tratterremo sopra altri esempj.

LXXVIII.

In questo caso abbiamo ottenuto il valore di z sotto la forma d' infinita serie, e sotto la forma finita, ma ordinariamente le serie che si otterranno non saranno suscettibili così facilmente di essere sommate, e converrà contentarsi della forma d' infinita serie. Prendiamo per esempio a considerar la Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\phi^2}\right)+a\left(\frac{dz}{d\phi}\right)+b\left(\frac{dz}{dm}\right)+cz=0$$

ove siano a, b, c quantità costanti. Facciamovi per ridurla più semplice

$$z=e^{h\phi+\mathrm{K}m}\cdot p$$

essendo h, K quantità costanti; ed avremo sostituendo, e dividendo per $e^{h\varphi + Km}$ la trasformata

$$\left(\frac{d^2 p}{d\varphi^2}\right) + \left\{ 2h + a \right\} \left(\frac{dp}{d\varphi}\right) + b\left(\frac{dp}{dm}\right) + \left\{ h^2 + ah + bK + c \right\} p = 0$$

Ponghiamo adesso

$$2h + a = 0$$

$$h^2 + ah + bK + c = 0$$

ed avremo

$$h = -\frac{a}{2}$$

$$K = \frac{a^2 - 4c}{b}$$

E la nostra trasformata si ridurrà alla semplicissima forma

$$\left(\frac{d^2 p}{d\varphi^2}\right) + b\left(\frac{dp}{dm}\right) = 0$$

Dalla quale dovrà determinarsi il valore di p

Facciamovi per tanto

$$p = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos. 2\varphi + A_3 \cos. 3\varphi + \dots + A_x \cos. x\varphi + \dots$$

e sostituendo, immediatamente si vedrà che il termine generale A_x dovrà sodisfare alla Equazione

$$b\frac{dA_x}{dm} - x^2 A_x = 0$$

Onde ritrarremo

$$A_x = q_x e^{x^2 \frac{m}{b}}$$

ove q_x è l'arbitraria introdotta dalla Integrazione, che per maggior generalità si suppone funzione di x. Sostituendo questo valore nella serie che esprime il valore di p si avrà

$$p = q + q_1 e^{\frac{m}{b}} . \cos. \phi + q_2 e^{\frac{2m}{b}} . \cos. 2\phi + q_3 . e^{\frac{3m}{b}} . \cos. 3\phi + \ldots\ldots\ldots$$

Dove le infinite arbitrarie q, q_1, q_2...... mostrano la presenza di una funzione arbitraria, che può mettersi in evidenza come precedentemente abbiamo fatto (LXXVIII). Ordinando in fatti per le potenze di ϕ, si avrà

$$p = q + q_1 e^{\frac{m}{b}} + q_2 e^{\frac{2m}{b}} + q_3 e^{\frac{3m}{b}} + \ldots$$

$$- \frac{\phi^2}{2}\left\{ q_1 e^{\frac{m}{b}} + 2^2 q_2 e^{\frac{2m}{b}} + 3^2 q_3 e^{\frac{3m}{b}} + \ldots\right\}$$

$$+ \frac{\phi^4}{2.3.4.}\left\{ q_1 e^{\frac{m}{b}} + 2^4 . q_2 e^{\frac{2m}{b}} + 3^4 . q_3 e^{\frac{3m}{b}} + \ldots\right\}$$

$$- \&c.$$

e facendo

$$q + q_1 e^{\frac{m}{b}} + q_2 e^{\frac{2m}{b}} + q_3 e^{\frac{3m}{b}} + \ldots = F . e^{\frac{m}{b}}$$

ove F rappresenta una funzione arbitraria, si avrà sostituendo, e facendo $u = e^{\frac{m}{b}}$

$$p = Fu - \frac{\phi^2}{2}\,\frac{u\,dFu}{du} + \frac{\phi^4}{2.3.4.}\,\frac{u\,d\,u\,dFu}{du^2} - \&c.$$

Ma avendosi

$$z = e^{-\frac{a}{2}\varphi + \frac{a^2-4c}{b} m} \cdot p$$

sarà ancora

$$z = e^{-\frac{a}{2}\varphi + \frac{a^2-4c}{b}.m} \left\{ Fu - \frac{\varphi^2}{2}\frac{udFu}{du} + \frac{\varphi^4}{2.3.4.}\frac{udud Fu}{du} - \&c. \right\}$$

che rapprenterà l'integrale della Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{d\varphi}\right) + b\left(\frac{dz}{dm}\right) + cz = 0$$

con una funzione arbitraria di u, ossia di $e^{\frac{m}{b}}$.

LXXIX.

La Equazione a parziali Differenze di cui ci siamo occupati è stata per lungo tempo dai Geometri creduta non suscettibile di ammettere nel suo Integrale veruna funzione arbitraria; ed invalse tale opinione finchè il sommo Sig. Paoli ne dimostrò la erroneità con dottissima analisi, prevalendosi di un ramo di calcolo Integrale di cui fù il primo promotore, quello cioè delle Equazioni che comprendono le differenze parziali finite, ed infinitesime di una funzione; Equazioni delle quali abbiamo già veduto qualche esempio (XIX), ed ottenne l'Integrale della proposta con due funzioni arbitrarie. Posteriormente essendosi i Geometri rivolti con maggiore attenzione a considerare il numero delle funzioni arbitrarie as-

solutamente irreducibili che nell' Integrale delle Equazioni a Differenze Parziali sono comprese, hanno riconosciuto che senza limitare la generalità dell' Integrale potevano le due funzioni arbitrarie dal Sig. Paoli ottenute nell' Integrale della Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+a\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)+b\left(\frac{dz}{dm}\right)+cz=o$$

ridursi ad una sola, e questa osservazione che il Sig. Poisson fece il primo, è stata per differenti strade confermata dal Sig. Laplace, e dal Sig. Paoli stesso.

LXXX.

Scegliendo per integrare la proposta in luogo di una serie ordinata per i coseni una serie che proceda per i seni, si otterrà appunto una nuova espressione per z la quale aggiunta alla precedente offre una più general soluzione di quella ottenuta. Riprendiamo la Equazione

$$\left(\frac{d^2p}{d\varphi^2}\right)+b\left(\frac{dp}{dm}\right)=o$$

dalla quale abbiamo veduto (LXXVIII) che la proposta dipende. In luogo di p facciamovi

$$p=M_1\,sen.\,\varphi+M_2\,sen.\,2\varphi+M_3\,sen.\,3\varphi+\ldots+M_x\,sen.\,x\varphi+\ldots$$

e troveremo per determinare M_x la stessa Equazione che sopra abbiamo incontrata (LXXVIII), cioè

$$\frac{b\, d\, M_x}{d\, m} - x^2 M_x = 0$$

onde

$$M_x = c_x\, e^{x^2 \frac{m}{b}}$$

quindi sostituendo, si avrà

$$p = c_1\, e^{\frac{m}{b}} \,.\, sen\, \varphi + c_2 e^{2^2 \frac{m}{b}} \,.\, sen.\, 2\varphi + c_3 e^{3^2 \frac{m}{b}} \cdot sen.\, 3\varphi + \ldots$$

cioè ordinando per le potenze di φ, e facendo, come sopra (LXXVIII) $u = e^{\frac{m}{b}}$, si avrà anche

$$p = \varphi \left\{ c_1 u + 2\, c_2 u^{2^2} + 3\, c_3\, u^{3^2} + 4\, c_4 u^{4^2} + .. \right\}$$

$$\frac{-\varphi^3}{2\,.\,3} \left\{ c_1\, u + 2^3\, c_2 u^{2^2} + 3^3\, c_3\, u^{3^2} + 4^3 . c^4 u^{4^2} + .. \right\}$$

$$\frac{+\ \varphi^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \left\{ c_1 u + 2^5\, c_2\, u^{2^2} + 3^5\, c_3 u^{3^2} + 4^5 c_4\, u^{4^2} + .. \right\}$$

$$-\ \&c.\ldots$$

onde facendo

$$c_1 u + 2\, c_2 u^{2^2} + 3\, c_3\, u^{3^2} + 4\, c_4 u^{4^2} + .. = \Psi u$$

si otterrà

$$c_1 u + 2^3 c_2\, u^{2^2} + 3^3 c_3\, u^{3^2} + .. = \frac{u\, d\, \Psi\, u}{d\, u^2}$$

$$c_1 u + 2^5\, c_2\, u^{2^2} + 3^5\, c_3\, u^{3^2} + .. = \frac{u\, d\, u\, d\, \Psi\, u}{d\, u^2}$$

&c.

e sostituendo

$$p = \phi \Upsilon u - \frac{\phi^3}{2.3}\,\frac{u\,d\Upsilon u}{du} + \frac{\phi^5}{2.3.4.5}\,\frac{u\,du\,d\Upsilon u}{du^2} - \&c.$$

ma abbiamo

$$z = e^{-\frac{a}{2}\phi + \frac{a^2-4c}{b}.m}.p$$

quindi sarà anche

$$z = e^{-\frac{a}{2}\phi + \frac{a^2-4c}{b}.m} \left\{ \phi.\Upsilon u - \frac{\phi^3}{2.3}\,\frac{u\,d\Upsilon u}{du} + \frac{\phi^5}{2.3.4.5}\,\frac{u\,du\,d\Upsilon u}{du^2} - \&c. \right.$$

Se aggiungeremo questo valore di z a quello precedentemente ottenuto (LXXVIII) si avrà per l'integrale della Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\phi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\left(\frac{dz}{dm}\right) + cz = 0$$

la più generale espressione

$$z = e^{-\frac{a}{2}\phi + \frac{a^2-4c}{b}m} \left\{ Fu + \phi\Upsilon u - \frac{\phi^2}{2}u\,\frac{dFu}{du} - \frac{\phi^3}{2.3}\,\frac{u\,d\Upsilon u}{du} + \&c. \right\}$$

ove sebbene nella quantità compresa tra le parentesiappariscano due funzioni arbitrarie, pure essa non dipende che da una sola arbitraria funzione, come può vedersi dimostrato nella memoria sulle soluzioni particolari del Sig. Poisson, e nella opera sulle Probabilità del Sig. Laplace.

LXXXI.

E' molto osservabile che lo stesso metodo con cui può integrarsi la Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dm}\right) + bz = c$$

nel caso di a, b, c costanti, può ancora applicarsi al caso in cui più generalmente siano a, b, c funzioni comunque di m. Facciamo in fatti nella nostra Equazione

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + A_3 \cos.3\varphi + \ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots$$

ed avremo sostituendo

$$\frac{a\,dA}{dm} + \frac{a\,dA_1}{dm}.\cos.\varphi + \frac{a\,dA_2}{dm}\cos.2\varphi + \frac{a\,dA_3}{dm}\cos.3\varphi + \ldots + \frac{a\,dA_x}{dm}.\cos.x\varphi + \ldots$$

$$+ bA + bA_1 \cos.\varphi + bA_2 \cos.2\varphi + bA_3 \cos.3\varphi + \ldots + bA_x.\cos.x\varphi + \ldots$$

$$- A_1 \cos.\varphi - 2^2 A_2 \cos.2\varphi - 3^2 A_3 \cos.3\varphi - \&c. - x^2 A_x \cos.x\varphi - \&c.$$

$$- c = 0.$$

Supponghiamo ora primieramente per sodisfarvi

$$a\frac{dA}{dm} + bA - c = 0$$

onde avrassi

$$A = e^{-\int \frac{b}{a} dm} \left\{ B + \int e^{\int \frac{b}{a}.dm} \frac{c}{a} dm \right\}$$

ove R è una arbitraria. Sia inoltre

$$\frac{a\,dA_x}{dm}+(b-x^2)A_x=0.$$

e sarà integrando

$$A_x=B_x\,e^{x^2\int\frac{dm}{a}-\int\frac{b}{a}.dm}$$

con le quali determinazioni la trasformata ottenuta sarà completatamente sodisfatta.

Sostituendo questi valori nella serie assegnata per z, si avrà

$$z=e^{-\int\frac{b}{a}dm}\left\{B+B_1\,e^{\int\frac{dm}{a}}cos.\varphi+B_2\,e^{2^2\int\frac{dm}{a}}cos.2\varphi+B_3e^{3^2\int\frac{dm}{a}}cos.3\varphi+\ldots\ldots\right\}$$

$$+\,e^{-\int\frac{b}{a}\cdot dm}\int e^{\int\frac{b}{a}\cdot dm}\,\frac{c}{a}\,dm$$

Possiamo operare come precedentemente sulla quantità compresa tra le parentesi affine di porre in evidenza la funzione arbitraria che dalle infinite indeterminate B, B_1, B_2, viene annunziata; e facendo $e^{\int\frac{dm}{a}}=u$, si troverà facilmente eseguendo le operazioni indicate (LXXVIII)

$$z=e^{-\int\frac{b}{a}\cdot dm}\left\{F\,u-\frac{\varphi^2}{2}\frac{u\,dFu}{du}+\frac{\varphi^4}{2\cdot3\cdot4}\frac{u\,du\,dFu}{du^2}-\&c.\right\}$$

$$+\,e^{-\int\frac{b}{a}\cdot dm}\int e^{\int\frac{b}{a}\cdot dm}\,\frac{c}{a}\,dm$$

LXXXII.

Se l'ultimo termine c della Equazione

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dm}\right) + bz = c$$

fosse funzione non solo di m ma ancora di m, e φ, la integrazione della proposta non ammetterebbe nessuna nuova difficoltà. Incominceremo ad applicare alla funzione c i metodi precedenti affine di svolgerla in serie per i coseni degli archi moltiplici, e sarà generalmente (XXIX)

$$c = \frac{1}{\pi}\int c\,d\varphi + \frac{2}{\pi}.\cos.\varphi\int c\,d\varphi.\cos.\varphi + \frac{2}{\pi}\cos.2\varphi\int c\,d\varphi\cos.2\varphi + \ldots$$

integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. E facendo per semplicità

$$p_x = \frac{2}{\pi}\int c\,d\varphi.\cos.x\varphi$$

avremo

$$c = \frac{1}{2}p_0 + p_1\cos.\varphi + p_2\cos.2\varphi + \ldots\ldots + p_x\cos.x\varphi + \ldots\ldots$$

Facciamo inoltre

$$z = A + A_1\cos.\varphi + A_2\cos.2\varphi + A_3\cos.4\varphi + \ldots + A_x\cos.x\varphi + \ldots\ldots$$

ed ambe questi valori si sostituiscano nella Equazione proposta

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) + a\left(\frac{dz}{dm}\right) + bz = c$$

ed avremo

$$a\frac{dA}{dm}+a\frac{dA_1}{dm}.\cos.\varphi+a\frac{dA_2}{dm}.\cos.2\varphi+a\frac{dA_3}{dm}.\cos.3\varphi+\dots+a\frac{dA_x}{dm}.\cos.x\varphi+\dots$$

$$-A_1\cos.\varphi-2^2A_2\cos.2\varphi-3^2A_3\cos.3\varphi.\dots-x^2A_x\cos.x\varphi\dots$$

$$+bA+bA_1\cos.\varphi+bA_2\cos.2\varphi+bA_3\cos.3\varphi+\dots+bA_x\cos.x\varphi+\dots$$

$$-\tfrac{1}{2}p_0-p_1\cos.\varphi-p_2\cos.2\varphi-p_3\cos.3\varphi\dots-p_x\cos.x\varphi-\&c.$$

per sodisfarvi facciamo

$$a\frac{dA}{dm}+bA-\tfrac{1}{2}p_0=0$$

onde si trarrà

$$A=e^{-\int\frac{b}{a}.dm}\left\{B+\tfrac{1}{2}\int e^{\int\frac{b}{a}dm}\frac{p_0}{a}.dm\right\}$$

Si faccia inoltre, qualunque sia x

$$a\frac{dA_x}{dm}+(b-x^2)A_x-p_x=0$$

cioè integrando

$$A_x=e^{x^2\int\frac{dm}{a}-\int\frac{b}{a}.dm}\left\{B_x+\int e^{\int\frac{b}{a}dm+x^2\int\frac{dm}{a}}\frac{p_x}{a}.dm\right\}$$

ossia, facendo per semplicità

$$e^{\int\frac{dm}{a}}=u$$

$$\int e^{\int \frac{b}{a} dm - x^2 \int \frac{dm}{a}} \frac{px}{a} . dm = \delta_x$$

avremo più semplicemente

$$A = e^{-\int \frac{b}{a} . dm} \left\{ B + \tfrac{1}{2} \delta_0 \right\}$$

$$A_x = u^{x^2} e^{-\int \frac{b}{a} . dm} \left\{ B_x + \delta_x \right\} .$$

Sostituendo questi valori nella serie

$$z = A + A_1 \cos . \varphi + A_2 \cos . 2 \varphi + \ldots\ldots + A_x \cos . x \varphi + \ldots$$

facilmente vedremo che per semplicità facendo

$$u^{x^2} e^{-\int \frac{b}{a} . dm} \delta_x = \lambda_x$$

Il resultato della sostituzione potrà mettersi sotto la forma

$$z = \frac{1}{2} \lambda_0 + \lambda_1 \cos . \varphi + \lambda_2 \cos . 2 \varphi + \lambda_3 \cos . 3 \varphi + \&c.$$

$$+ e^{-\int \frac{b}{a} . dm} \left\{ B + B_1 u . \cos . \varphi + B_2 . u^{2^2} \cos . 2 \varphi + B_3 u^{3^2} \cos . 3 \varphi + \&c. \right\}$$

La quantità compresa tra le parentesi è suscettibile delle riduzioni stesse che abbiamo praticate in casi analoghi (LXXVIII); ed ordinandola per le potenze di φ, e ponendo in evidenza la funzione arbitraria che le infinite indeterminate B, B_1, B_2 &c. ci annunziano, si otterrà facilmente

$$z = \frac{1}{2} \lambda_0 + \lambda_1 \cos. \varphi + \lambda_2 \cos. 2 \varphi + \lambda_3 \cos. 3 \varphi + \&c.$$

$$+ e^{-\int \frac{b}{a} \cdot dm} \left\{ F u - \frac{\varphi^2}{2} \frac{u d F u}{d u} + \frac{\varphi^4}{2.3.4.} \frac{u d u d F u}{d u^3} - \&c. \right\}$$

ove $F\ u$ è una funzione arbitraria

Così in questo caso, come nei precedenti due, se si fosse scelta una serie ordinata per i seni, noi saremmo pervenuti ad un differente valore di z che aggiunto al precedente ci offrirebbe le considerazioni stesse che ci presenta il caso più semplice che nell' articolo (LXXX) abbiamo trattato

LXXXIII.

Questo metodo può ancora con successo applicarsi alle Equazioni della forma stessa di quelle finora trattate, ma ad un maggior numero di variabili. Prendiamo infatti a considerare la Equazione a 4 variabili

$$\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2}\right) = a \left(\frac{d z}{dm}\right) + b \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

ove siano a, b quantità costanti. Facciamovi al solito

$$z = A + A_1 \cos. \varphi + A_2 \cos. 2 \varphi + A_3 \cos. 3 \varphi + \ldots + A_x \cos. x \varphi + \&c.$$

essendo A, A_1, A_2 &c. funzioni di m, e t. Sostituendo nella proposta, e sodisfacendovi indipendentemento dai differenti coseni, troveremo che il termine generale A_x della nostra serie è rappresentato dalla Equazione

$$a \left(\frac{dA_x}{d m}\right) + b \left(\frac{dA_x}{dt}\right) + x^2 A_x = 0$$

cioè integrando

$$A_x = e^{-\frac{x^2}{b}t} F_x(bm-at)$$

ove F_x dinota una funzione arbitraria. Quindi avremo sostituendo

$$z = F + e^{-\frac{1}{b}t} F_{,}\cos.\phi + e^{-\frac{2^2}{b}t} F_{,,}\cos.2\phi + e^{-\frac{3^2}{b}} F_{,,,}\cos.3\phi + \&c.$$

ove F, $F_{,}$, $F_{,,}$ &c. sono tutte funzioni arbitrarie di $bm-at$ tra di loro differenti, ed infinite di numero.

LXXXIV.

La Equazione più generale

$$\left(\frac{d^2z}{d\phi^2}\right) = a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\left(\frac{dz}{dt}\right) + c\,z$$

ove a, b, c siano funzioni di m, e t, ammette un integrale della specie stessa di quello che per la Equazione precedentemente sviluppata abbiamo ottenuto. Facciamo infatti

$$z = A + A_1\cos.\phi + A_2\cos.2\phi, + A_3\cos.3\phi + \ldots + A_x\cos.x\phi + \&c.$$

essendo A, A_1, A_2 &c. funzioni di m, e t. Sostituendo nella proposta questo valore di z, e sodisfacendovi indipendentemente dai differenti coseni, troveremo che il termine generale A_x dipende dalla Equazione

$$a\left(\frac{dA_x}{dm}\right) + b\left(\frac{dA_x}{dt}\right) + (c + x^2)A_x = 0$$

Per integrarla, dovremo, secondo il conosciuto metodo dovuto al

Sig. Lagrange, formare le due Equazioni

$$b\,dm - a\,dt = 0$$

$$b\,dA_x - (x^2 + b)\,dt = 0$$

La prima Equazione a due variabili m, t supponghiamo che integrata dia

$$h = R$$

ove h è l'arbitraria introdotta dalla Integrazione. Se mediante questa Equazione elimineremo m dall'altra

$$b\,d\,A_x - (x^2 + b)\,dt$$

si otterrà immediatamente

$$A_x = e^{x^2 \int \frac{dt}{b} + \int \frac{c}{b}\,dt}\,k$$

ove k è l'arbitraria, e dove nelle quantità b, c è stato in luogo di m sostituito il suo valore preso dalla Equazione

$$h = R$$

L'integrale della Equazione

$$a\left(\frac{dA_x}{dm}\right) + b\left(\frac{dA_x}{dt}\right) + (c + x^2)\,A_x = 0$$

è come sappiamo

$$k = F\,.\,h$$

essendo F una funzione arbitraria. Eliminando dunque k, ed h mediante le Equazioni ottenute, si avrà

$$A_x = e^{x^2 \int \frac{dt}{b} + \int \frac{c}{b}\,dt} \cdot FR$$

purchè gli integrali $\int \frac{dt}{b}$, $\int \frac{c}{b}\, dt$ siano presi nella ipotesi di R costante, secondo l'espressivo modo di dire che il Sig. Paoli ha posto in uso il primo.

Si sostituisca adesso questo valore di A_x nella serie

$$z = A + A_1 \cos.\varphi + A_2 \cos.2\varphi + \ldots + A_x \cos.x\varphi + \ldots$$

ed avvertendo che questo valore di z sodisfà per le determinazioni precedenti alla Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) = a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\left(\frac{dz}{dt}\right) + cz$$

indipendentemente dai diversi coseni, potremo per maggior generalità supporre che di termine in termine sia differente la composizione della funzione arbitraria F.R. In tal maniera si avrà, fatta la sostituzione

$$z = e^{\int \frac{c}{b} dt} \left\{ FR + e^{\int \frac{dt}{b}} . F_{,}R . \cos.\varphi + e^{2\int \frac{dt}{b}} . F_{,,}R . \cos.2\varphi + \ldots \right\}$$

LXXXV.

Se vi fosse ancora un ultimo termine e funzione di m, t, φ in modo che dovesse integrarsi la Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) = a\left(\frac{dz}{dm}\right) + b\left(\frac{dz}{dt}\right) + cz + e$$

il metodo stesso precedentemente posto in uso ci sarà assai utile. S'incomincerà da svolgere la quantità e in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici di φ, e facendo per semplicità

$$p_x = \frac{2}{\pi} \int d\varphi . e . \cos.x\varphi$$

ove l'integrale sia preso tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, noi avremo

$$e=\tfrac{1}{2}p_0+p_1\cos.\phi+p_2\cos.2\phi+p_3\cos.3\phi+\ldots+p_x\cos.x\phi+\ldots$$

Supponghiamo ora

$$z=A+A_1\cos.\phi+A_2\cos.2\phi+A_3\cos.3\phi+\ldots+A_x\cos.x\phi+\ldots$$

e questo valore di z, e quello di e si sostituiscano nella proposta

$$\left(\frac{d^2z}{d\phi^2}\right)=a\left(\frac{dz}{dm}\right)+b\left(\frac{dz}{dt}\right)+cz+e$$

alla quale se sodisfaremo con le sostituzioni indicate indipendentemente dai differenti coseni, si troverà che il termine generale A_x dipende dalla Equazione

$$\left(\frac{dA_x}{dt}\right)+a\left(\frac{dA_x}{dm}\right)+(x^2+c)A_x+p_x=0$$

dalla quale dedurremo le solite due Equazioni

$$b\,dm-a\,dt=0$$

$$b\,dA_x-(x^2+c)A_x\,dt-p_x\,dt$$

e se $h=R$ rappresenterà l'integrale della prima Equazione, ove h è arbitraria, ed R funzione di m, e t, noi avremo dalla seconda

$$A_x=F\cdot R\cdot e^{x^2\int\frac{dt}{b}+\int\frac{c}{b}dt}+e^{x^2\int\frac{dt}{b}+\int\frac{c}{b}dt}\int e^{-x^2\int\frac{dt}{b}-\int\frac{c}{b}dt}\cdot\frac{1}{b}\cdot p_x\cdot dt$$

purchè tutti gli integrali si prendano nella supposizione di R costante. Facendo per maggior semplicità

$$q_x=e^{x^2\int\frac{dt}{b}}\int e^{-x^2\int\frac{dt}{b}-\int\frac{c}{b}dt}\,\frac{1}{b}\cdot p_x\cdot dt$$

sarà anche

$$A_x = F.R.e^{x^2\int\frac{dt}{b} + \int\frac{c}{b}dt} + e^{\int\frac{c}{b}dt}.q_x$$

Il primo termine A lo troveremo espresso dalla formula

$$A = e^{\int\frac{c}{b}dt}\tfrac{1}{2}q_0 + e^{\int\frac{c}{b}dt}.FR$$

e sostituendo questi valori nella serie

$$z = A + A_1 cos.\varphi + A_2 cos\ 2\varphi + .. + A_x cos.x\varphi + ...$$

si troverà, previe le solite avvertenze sulla diversità che impunemente possiamo ammettere tra le funzioni arbitrarie comprese nelle quantità A, A_1, A_2, ..., che il valore di z sarà dato dalla serie

$$z = e^{\int\frac{c}{b}dt}\left\{\tfrac{1}{2}q_0 + q_1 cos.\varphi + q_2 cos.2\varphi + q_3 cos.3\varphi + \&c.\right\}$$

$$+ e^{\int\frac{c}{b}dt}\left\{FR + e^{\int\frac{dt}{b}}cos.\varphi \cdot F_1R + e^{2^2\int\frac{dt}{b}}cos.2\varphi.F_{II}R + \&c.\right\}$$

La quale espressione sodisfarà alla proposta

Molto facilmente si potrebbero moltiplicare gli esempi di questo metodo, ed estenderne l'applicazione ad Equazioni di ordini più elevati, ma la di lui semplicità, ed uniformità ci dispensa da un ulteriore sviluppo.

FINE.